離散数学 (7) **2012 年 6 月 4 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 7.1 集合 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3\}$ に対して，次で定義される各関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．

1. $f_1 \colon A \to B$ で，$f_1(1) = 1$，$f_1(2) = 3$，$f_1(3) = 1$，$f_1(4) = 3$.
2. $f_2 \colon A \to B$ で，$f_2(1) = 3$，$f_2(2) = 1$，$f_2(3) = 3$，$f_2(4) = 2$.
3. $f_3 \colon B \to A$ で，$f_3(1) = 2$，$f_3(2) = 4$，$f_3(3) = 2$.
4. $f_4 \colon B \to A$ で，$f_4(1) = 2$，$f_4(2) = 1$，$f_4(3) = 3$.
5. $f_5 \colon B \to B$ で，$f_5(1) = 2$，$f_5(2) = 2$，$f_5(3) = 1$.
6. $f_6 \colon B \to B$ で，$f_6(1) = 3$，$f_6(2) = 1$，$f_6(3) = 2$.

復習問題 7.2 関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

であるとして定義する．

1. 関数 f が全射であることを証明せよ．
2. 関数 f が単射であることを証明せよ．
3. 関数 f の逆関数 $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか，答えよ．

復習問題 7.3 関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

であるとして定義する．

1. 関数 f が全射ではないことを証明せよ．
2. 関数 f が単射ではないことを証明せよ．

補足問題 7.4 実数の集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して，関数 $f \colon A \to B$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

であるとして定義する．以下のように A と B を定めるとき，関数 f が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．

1. $A = \mathbb{R}$，$B = [0, \infty)$.
2. $A = [0, \infty)$，$B = [0, \infty)$.
3. $A = [0, 1]$，$B = [0, \infty)$.

補足問題 7.5 任意の集合 A, B と任意の関数 $f \colon A \to B$ を考える．関数 f が全単射であるとき，その逆関数 f^{-1} も全単射であることを証明せよ．

追加問題 7.6 次のそれぞれの関数が全射であるか，単射であるか，全単射であるか，答えよ．そして，全単射である場合は，その逆関数が何であるか，答えよ．

1. $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_1(a) = a^3$.
2. $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_2(a) = 2^a$.
3. $f_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ で，任意の $a \in \mathbb{N}$ に対して，$f_3(a) = 2a + 1$.
4. $f_4 \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_4(a) = \sin a$.

追加問題 7.7 任意の集合 A, B，任意の単射 $f \colon A \to B$ を考える．任意の $X \subseteq A$ に対して $f^{-1}(f(X)) = X$ となることを証明せよ．

追加問題 7.8 任意の集合 A, B, C，任意の関数 $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ を考える．関数 f, g がともに単射ならば，$g \circ f \colon A \to C$ も単射であることを証明せよ．

追加問題 7.9 任意の集合 A, B, C，任意の関数 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．関数 f, g がともに全射ならば，$g \circ f\colon A \to C$ も全射であることを証明せよ．

追加問題 7.10　任意の集合 A, B, C，任意の関数 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．関数 $g \circ f\colon A \to C$ が単射ならば，f も単射であることを証明せよ．

追加問題 7.11　任意の集合 A, B, C，任意の関数 $f\colon A \to B, g\colon B \to C$ を考える．関数 $g \circ f\colon A \to C$ が全射ならば，g も全射であることを証明せよ．

追加問題 7.12 任意の集合 A, B，任意の全単射 $f\colon A \to B$ を考える．このとき，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ となることを証明せよ．同じく，$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ となることを証明せよ．