

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 6.1 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{6, 7, 8\}$  に対して，関数  $f: A \rightarrow B$  を  $f(1) = 6, f(2) = 6, f(3) = 7, f(4) = 7, f(5) = 8$  で定義する．このとき，次の集合は何になるか？ その要素をすべて並べること（外延的定義）により答えよ．

1.  $f(\{1, 2\})$  .
2.  $f(\{1, 2, 3\})$  .
3.  $f(\{1, 2, 3, 4\})$  .
4.  $f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$  .
5.  $f(\{2\})$  .
6.  $f^{-1}(\{6\})$  .
7.  $f^{-1}(\{6, 7\})$  .
8.  $f^{-1}(\{6, 7, 8\})$  .
9.  $f^{-1}(\{7, 8\})$  .
10.  $f^{-1}(\{6, 8\})$  .

復習問題 6.2 集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{8, 9\}$  に対して，関数  $f: A \rightarrow B$  を  $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$  で，関数  $g: B \rightarrow C$  を  $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$  で定義する．このとき， $g \circ f: A \rightarrow C$  はどのような関数であるか？ すべての  $a \in A$  に対して  $(g \circ f)(a)$  が何であるか定めよ．

復習問題 6.3 任意の集合  $A, B$ ，任意の関数  $f: A \rightarrow B$ ，任意の集合  $X, X' \subseteq A$  に対して，

$$X \subseteq X' \text{ ならば } f(X) \subseteq f(X')$$

となることを証明せよ．

追加問題 6.4 集合  $A, B, C$  を  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{8, 9, 10\}$  と定義する．関数  $f: A \rightarrow B$  を  $f(1) = 5, f(2) = 5, f(3) = 6$  で定義する．関数  $g: B \rightarrow C$  を  $g(4) = 8, g(5) = 8, g(6) = 9, g(7) = 10$  で定義する．このとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること（外延的定義）により答えよ．

1.  $f(\{1, 2, 3\})$  .
2.  $f(\{1, 2\})$  .
3.  $g(\{4, 5, 6\})$  .
4.  $g(\{5, 6, 7\})$  .
5.  $f^{-1}(\{4, 5\})$  .
6.  $f^{-1}(\{4, 5, 6, 7\})$  .

7.  $g^{-1}(\{8, 9\})$  .
8.  $g^{-1}(\{8, 9, 10\})$  .
9.  $f^{-1}(f(\{1, 3\}))$  .
10.  $f^{-1}(g^{-1}(\{8, 9\}))$  .
11.  $(g \circ f)(\{1, 2\})$  .
12.  $(g \circ f)^{-1}(\{8, 9\})$  .

追加問題 6.5 任意の集合  $A, B$ ，任意の関数  $f: A \rightarrow B$ ，任意の部分集合  $X, X' \subseteq A$  に対して

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 6.6 任意の集合  $A, B$ ，任意の関数  $f: A \rightarrow B$ ，任意の部分集合  $Y, Y' \subseteq B$  に対して

$$Y \subseteq Y'$$

ならば

$$f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

となることをが成り立つことを証明せよ．

追加問題 6.7 任意の集合  $A, B$ ，任意の関数  $f: A \rightarrow B$ ，任意の部分集合  $X \subseteq A$  に対して

$$X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 6.8 任意の集合  $A, B, C$ ，任意の関数  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ，任意の集合  $Z \subseteq C$  に対して，

$$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$$

が成り立つことを証明せよ．