

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 5.1 任意の集合  $A, B, C$  に対して

$$A \subseteq B \text{ ならば } C - B \subseteq C - A$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 5.2 任意の集合  $A$  に対して

$$\emptyset \subseteq A$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 5.3 任意の集合  $A, B, C$  に対して，

$$A \subseteq B \cap C$$

であるための必要十分条件が

$$A \subseteq B \text{ かつ } A \subseteq C$$

であることを，同値変形によって証明せよ．

復習問題 5.4 集合  $A, B$  を  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d, e\}$  と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1.  $A \times B$  .
2.  $B \times A$  .
3.  $A \times \emptyset$  .
4.  $\emptyset \times B$  .

復習問題 5.5 集合  $A$  を次のように定めるとき， $2^A$  はそれぞれ何になるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1.  $A = \{a, b, c\}$  .
2.  $A = \{a\}$  .
3.  $A = \emptyset$  .
4.  $A = \{\emptyset\}$  .

復習問題 5.6 任意の集合  $A, B, C$  に対して

$$(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$$

が成り立つことを同値変形により証明せよ．

復習問題 5.7 任意の集合  $A, B$  に対して

$$2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：問題 5.3 を利用してみよ．)

補足問題 5.8 任意の命題  $P, Q$  に対して次が成り立つことを，真理値表を用いて証明せよ．

1.  $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$  .
2.  $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$  .
3.  $F \Rightarrow P$  .

追加問題 5.9 集合  $A, B, C$  を  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\}$ ,  $C = \{6\}$  と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1.  $A \times B$  .
2.  $B \times A$  .
3.  $A^2$  .
4.  $C^3$  .
5.  $2^B$  .
6.  $2^A \times 2^B$  .

追加問題 5.10 任意の集合  $A, B, C$  に対して

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C$$

ならば

$$A \subseteq C$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：推論において，モードゥス・ポネンスを利用して見よ．)

追加問題 5.11 任意の集合  $A, B$  に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A = A - B$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 5.12 集合  $A, B$  に対して

$$A \subseteq B$$

であるための必要十分条件が

$$2^A \subseteq 2^B$$

であることを証明せよ．ヒント：同値変形によって証明することは難しそうなので「 $A \subseteq B$  ならば  $2^A \subseteq 2^B$ 」と「 $2^A \subseteq 2^B$  ならば  $A \subseteq B$ 」の両方を別々に証明せよ．