

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 3.1 真理値表を用いることで，任意の命題変数 P, Q に対して次が成り立つことを証明せよ．

1. (この演習問題は消えました．)

$$2. P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q .$$

$$3. P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) .$$

$$4. \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q .$$

$$5. \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q .$$

$$6. P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q .$$

$$7. P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P .$$

$$1. P \wedge P \Leftrightarrow P .$$

$$2. P \vee P \Leftrightarrow P .$$

$$3. P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P .$$

$$4. P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P .$$

$$5. (P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P .$$

$$6. (P \vee Q) \wedge P \Leftrightarrow P .$$

$$7. P \Leftrightarrow \neg(\neg P) .$$

$$8. (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) .$$

$$9. (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) .$$

復習問題 3.2 同値変形によって，任意の命題変数 P, Q, R に対して次が成り立つことを証明せよ．

$$1. P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R) .$$

$$2. (P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R) .$$

$$10. (P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) .$$

$$11. (P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) .$$

$$12. P \wedge \top \Leftrightarrow P .$$

$$13. P \vee \text{F} \Leftrightarrow P .$$

復習問題 3.3 議論領域 D ，命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して，次の文を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに成り立つことを，真理値表によって証明せよ．

$$1. \neg(\forall x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x)) .$$

$$2. \neg(\exists x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D (\neg P(x)) .$$

$$14. P \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F} .$$

$$15. P \vee \top \Leftrightarrow \top .$$

$$16. (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow (Q \wedge R) .$$

$$17. (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R .$$

復習問題 3.4 同値変形によって，任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.5 同値変形によって，任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

が成り立つことを証明せよ．

補足問題 3.7 議論領域 D ，命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して，次の文を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに成り立つことを，真理値表によって証明せよ．

$$1. (\forall x \in D (P(x))) \wedge \forall x \in D (Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x)) .$$

$$2. (\exists x \in D (P(x))) \vee \exists x \in D (Q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \vee Q(x)) .$$

補足問題 3.8 議論領域 D ，命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して，次の文を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに成り立つことを，真理値表によって証明せよ．

補足問題 3.6 真理値表を用いることで，任意の命題変数 P, Q, R に対して次が成り立つことを証明せよ．

$$1. \forall x \in D (\forall y \in D (P(x, y)))$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in D (\forall x \in D (P(x, y))) .$$

2. $\exists x \in D (\exists y \in D (P(x, y)))$
 $\Leftrightarrow \exists y \in D (\exists x \in D (P(x, y)))$.

補足問題 3.9 議論領域 D と命題 P に対して, 次の文を考える. ただし, P の中に x は自由変数として現れないものとする. このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに成り立つことを, 真理値表によって証明せよ.

1. $P \Leftrightarrow \forall x \in D (P)$.
2. $P \Leftrightarrow \exists x \in D (P)$.

補足問題 3.10 議論領域 D と命題 P に対して, 次の文を考える. ただし, P の中に x は自由変数として現れないものとする. このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに成り立つことを, 真理値表によって証明せよ.

1. $\forall x \in D (P(x) \vee Q) \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \vee Q)$.
2. $\exists x \in D (P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \wedge Q)$.

追加問題 3.11 真理値表を用いることで, 任意の命題変数 P, Q, R に対して次が成り立つことを証明せよ.

1. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$.
2. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.
3. $(P \rightarrow Q) \Rightarrow ((R \rightarrow Q) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow Q))$.

追加問題 3.12 同値変形によって, 任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して次が成り立つことを証明せよ.

1. $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x)) \rightarrow \exists x (Q(x))$.

追加問題 3.13 同値変形によって, 任意の命題関数 $P(x)$ と命題 Q に対して次が成り立つことを証明せよ. ただし, Q の中に x は自由変数として現れないものとする.

1. $\forall x (P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists x (P(x)) \rightarrow Q$.
2. $\forall x (Q \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \rightarrow \forall x (P(x))$.

発展追加問題 3.14 同値変形によって, 任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ と命題 R に対して次が成り立つことを証明せよ. ただし, R の中に x, y は自由変数として現れないものとする.

1. $(\exists x P(x) \vee R) \rightarrow \forall x (Q(x))$
 $\Leftrightarrow \forall x (\forall y ((P(x) \vee R) \rightarrow Q(y)))$.