離散数学 (1) **2013 年 4 月 9 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのか，すなわち証明，を必ず書き下すこと．

復習問題 1.1 命題変数 P, Q を使った次の命題論理式の真理値表を書け．

1. $(P \to Q) \to \neg Q$.
2. $\neg(P \wedge (Q \vee \neg P))$.

復習問題 1.2 集合 A を $A = \{$ あ, い, う, え, お $\}$ と定める．このとき，次の 4 つの中で，正しいものはどれか．すべて挙げよ．

1. あ $\in A$.
2. ま $\in A$.
3. お $\in A$.
4. う $\in A$.

復習問題 1.3 次の各集合は何であるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $A = \{n \mid n$ は 10 以下の素数である $\}$.
2. $B = \{n^2 \mid n$ は 10 以下の素数である $\}$.
3. $C = \{m - n \mid m$ と n は 10 以下の素数である $\}$.

復習問題 1.4 集合 A と B を $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, c, g, h\}$ と定める．このとき，次の 3 つの集合は何になるか？ 要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $A \cap B$.
2. $A \cup B$.
3. $A - B$.

発展復習問題 1.5 次のパズルはスマリヤン [2, 18–19 ページ] による．

> 「こんどは論理の問題じゃ」と白の女王さまがいいました.「赤の王さまが眠っていらっしゃるときは，王さまが信じなさることはすべてまちがっている．つまり本当のことでないのじゃ．けれども，王さまが目を覚ましていらっしゃるときは，信じなさることはすべて本当なのじゃ．さて，昨日の晩のぴったり十時に，赤の王さまは，いまご自分も，また赤の女王さまも，眠っていると信じなさった．ではそのとき，赤の女王さまは，眠っていらっしゃったか，それとも目をさましていらっしゃったか，どうじゃ？」

この問題の主旨は，上のパズルを記号論理の手法で解くことである．命題 P が「赤の王さまは眠っている」こと，命題 Q が「赤の女王さまは眠っている」ことを表すものとする．

1. 赤の王さまが信じていること，つまり,「いまご自分も，また赤の女王さまも，眠っている」ということを，P と Q を使った命題論理式で表せ．
2. 赤の王さまの性格と前問の解答となる命題論理式を踏まえて,「赤の王さまが眠っているとき，そのときに限り,『いまご自分も，また赤の女王さまも，眠っている』は正しくない」ということを，P と Q を使った命題論理式で表せ．
3. 前問の解答を踏まえて，パズルを解け．すなわち，赤の女王さまは眠っていたのか，どうか，決定せよ．

追加問題 1.6 命題変数 P, Q, R を使った次の命題論理式の真理値表を書け．

1. $((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P$.
2. $(P \to Q) \to ((R \to Q) \to ((P \vee R) \to Q))$.
3. $(P \to R) \wedge ((P \leftrightarrow Q) \vee (R \leftrightarrow Q))$.

追加問題 1.7 次の各集合は何であるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．ただし，$\mathbb{N}$ は自然数全体の集合であり，すなわち，0 以上の整数を全て集めた集合であるとする．

1. $A = \{n \mid n \in \mathbb{N},$ かつ $5 < n < 10\}$.
2. $B = \{n^2 \mid n$ は奇整数，かつ $0 \le n < 10\}$.
3. $C = \{n \mid n \in \mathbb{N},$ かつ $n^2 = -1\}$.

追加問題 1.8 集合 A, B, C を次のように定める.

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

このとき，次の各集合は何であるか？ その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ.

1. $A \cap B$.
2. $A \cup B$.
3. $A - B$.
4. $B - A$.
5. $(A \cap B) \cup C$.
6. $(A \cup B) - C$.
7. $C - (A \cup B)$.
8. $(A - B) \cap C$.

発展追加問題 1.9 次の論理パズルはスマリヤンの別の本に依拠する [1].

国勢調査員のマグレガーが「騎士と奇人の島」というヘンテコな島の調査に行く．その島には騎士と奇人しかおらず，騎士は本当のことしか言わず，奇人は間違ったことしか言わない．マグレガーは結婚しているカップルだけを調査の対象にした.

ケース 1： マグレガーがドアをノックすると，夫がドアを半分開いて用件を聞いた．マグレガーはそれに答えて,「国勢調査をしています．あなた方ご夫妻についてお尋ねしたいのですが，それぞれ騎士と奇人のどちらですか？」

「両方とも奇人だよ！」

夫と妻はそれぞれどちらに属するか？

ケース 2： 隣りの家でマグレガーが夫の方に尋ねた.「お宅は両方とも奇人ですか？」答は「少なくとも片方はね.」

さて，各々どちらか？

ケース 3： マグレガーが次に訪問した家はまたもや難問を出した．ドアをおずおずと開けた内気そうな男に，マグレガーが夫婦がそれぞれどちらか訪ねると，男の答はこれだけだった.「もし私が騎士ならば私の妻も騎士です.」

ちょっと不機嫌になったマグレガーは，歩き去りながら考えた.「こんなあいまいな答じゃ何もわかんないじゃないか！」そしてメモに「夫・妻—両方とも不詳」と書こうとしたちょうどそのとき，彼は大学時代の論理学の講義のことを思い出した.「そうだよ！ 夫・妻の両方ともわかるじゃないか.」

夫・妻，それぞれどちらか？

この演習問題の主旨は，記号論理を使ってこの 3 つのパズルを解くことである．命題 P が「夫は奇人である」こと，命題 Q が「妻は奇人である」ことを表すとする.

1. ケース 1 で夫が言ったこと「両方とも奇人だよ！」を P と Q を使った命題論理式で表せ.
2. ケース 2 で夫が言ったこと (の意味すること)「少なくとも片方は奇人だよ」を P と Q を使った命題論理式で表せ.
3. ケース 3 で夫が言ったこと「もし私が騎士ならば私の妻も騎士です」を P と Q を使った命題論理式で表せ.
4. それぞれのケースにおいて,「夫が奇人であるとき，そのときに限り，夫の言うことは間違っている」ということを，P と Q を使った命題論理式によって書き下せ.
5. 前問で得られた命題論理式の真理値表を書き下すことにより，それぞれのケースにおいて，夫と妻が騎士なのか奇人なのか，決定せよ.

参考文献

[1] レイモンド・スマリヤン (著)，長尾 確，田中 朋之 (訳),『決定不能の論理パズル』，白揚社，1990 年.

[2] レイモンド・M・スマリヤン (著)，市場 泰男 (訳),『パズルランドのアリス II 鏡の国篇』，早川書房，2004 年.