離散数学 **2013年8月19日**
期末試験 **岡本 吉央**

17:50–19:20. A4用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可.
携帯電話, タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと.

問題 1. 集合 A と B を $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ と定める. このとき, 以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か?

1. $\forall\, m \in A\ (\forall\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
2. $\exists\, m \in A\ (\forall\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
3. $\forall\, m \in A\ (\exists\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
4. $\exists\, m \in A\ (\exists\, n \in B\ (m < n$ である$))$.

問題 2. 集合 A, B を $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ と定義し, 関数 $f\colon A \to B$ を $f(a) = b$, $f(b) = d$, $f(c) = d$ と定義する. 次の集合がそれぞれ何であるか, その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ.

1. $A - B$.
2. $A \times B$.
3. 2^A, すなわち A の冪集合.
4. $f(\{a, b\})$.
5. $f^{-1}(\{c, d\})$.

問題 3. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

であるとして定義する.

1. 関数 f が全射であることを証明せよ.
2. 関数 f が単射であることを証明せよ.
3. 関数 f の逆関数 $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか, 答えよ.

問題 4. 任意の集合 A, B と任意の関数 $f\colon A \to B$ を考える. 集合 A 上の関係 R を次のように定義する. すなわち, 任意の $x, y \in A$ に対して, $x\,R\,y$ であることを $f(x) = f(y)$ であることとする. このとき, R が同値関係となることを証明せよ.

問題 5. 半順序集合 $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ のハッセ図を描け. ただし, $a \mid b$ であることを「a は b の約数である」と定義する.

問題 6. 任意の正の整数 n に対して, 整数 a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. 任意の正整数 n に対して

$$a_n = 2^n - 1$$

が成り立つことを証明せよ.

以上