**離散数学** **2013年8月6日**
**期末試験** **岡本 吉央**

17:50–19:20. A4用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可.
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと.

**問題 1.** 同値変形によって，任意の命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して

$$\exists\, x\ (P(x) \to Q(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x\ (P(x)) \to \exists\, x\ (Q(x))$$

が成り立つことを証明せよ.

**問題 2.** 集合 $A, B$ を $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ と定義し，関数 $f\colon A \to B$ を $f(1) = 5$, $f(2) = 3$, $f(3) = 3$ と定義する．次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ.

1. $A - B$.
2. $A \times B$.
3. $f(\{1,2\})$.
4. $f^{-1}(\{3,4\})$.

**問題 3.** 任意の集合 $A, B, C$ に対して $A \cap (C - (A \cap B)) \subseteq C - B$ が成り立つことを証明せよ.

**問題 4.** 関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$\text{任意の } a \in \mathbb{N} \text{ に対して } f(a) = 2a + 1$$

であるとして定義する．ここで，$\mathbb{N}$ はすべての正の整数から成る集合であるとする.

1. 関数 $f$ が全射ではないことを証明せよ.
2. 関数 $f$ が単射であることを証明せよ.

**問題 5.** 半順序集合 $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ のハッセ図を描け．ここで，$2^{\{1,2,3\}}$ は集合 $\{1,2,3\}$ の冪集合を表す.

**問題 6.** 任意の正の整数 $n$ に対して，第 $n$ 番フィボナッチ数 $F_n$ を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1, 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数 $n$ に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ.

以上

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する.