

情報数理科学特別講義 D / 情報数理科学特別講義 H / 情報数理科学特殊講義 B
第 4 回
近似アプローチ：局所探索法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 8 月 27 日

最終更新：2012 年 8 月 27 日 04:47

① 局所探索法

② 例 1：巡回セールスマン問題

③ 例 2：最大カット問題

④ 今日のまとめと補足

局所探索法 (局所探索アルゴリズム) とは？

局所探索法 (local search algorithm)

現在の解を少し変更してより良い解を得る，という操作を繰り返す方法

アルゴリズム設計からの視点

- ▶ 貪欲法は「構築法」
- ▶ 局所探索法は「改善法」

この講義の目標

次の理解

- ▶ 局所探索法の典型例を理解
- ▶ 局所探索法の性能解析を理解

① 局所探索法

② 例 1 : 巡回セールスマン問題

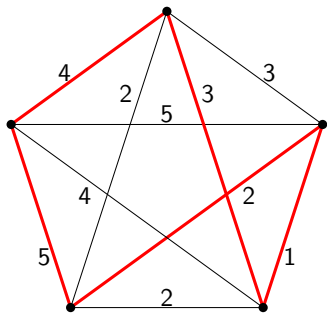
③ 例 2 : 最大カット問題

④ 今日のまとめと補足

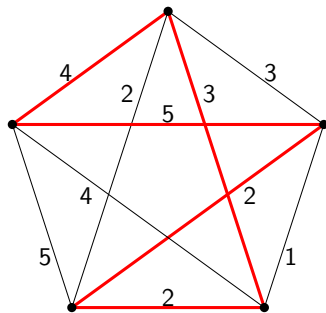
巡回セールスマン問題

定義: 巡回セールスマン問題

- ▶ 入力: **完全**グラフ $G = (V, E)$, 各辺 e に対する費用 $c(e)$
- ▶ 出力: G の巡回路
- ▶ 目的: 巡回路に使われている辺の費用和の最小化



費用和 = 15

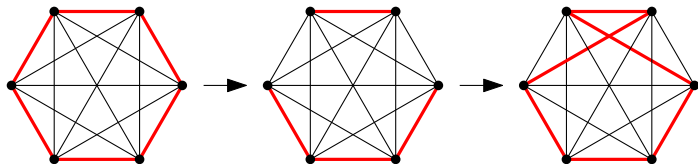


費用和 = 16

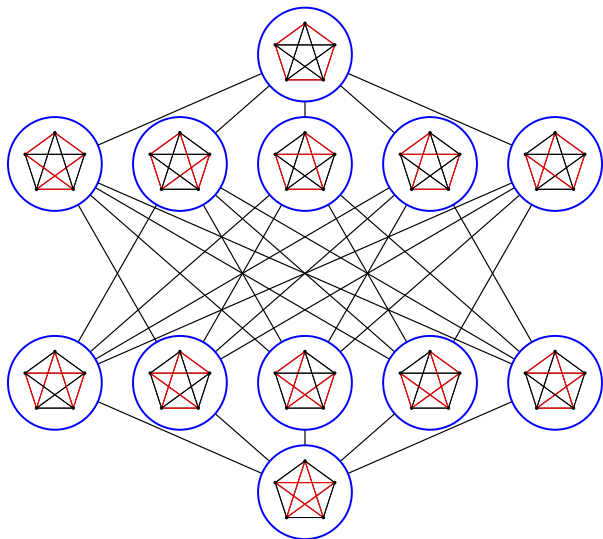
巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作

巡回路 T に対して, 次の操作を考える (2opt 操作と呼ばれる)

- 1 T の隣接しない 2 辺を取り除く (T が 2 つのパスに分かれる)
- 2 その 2 つのパスをつないで, T とは違う巡回路を得る

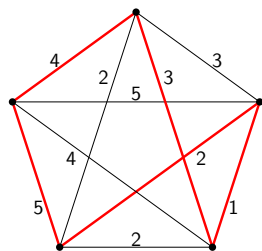


巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作 : 近傍グラフ

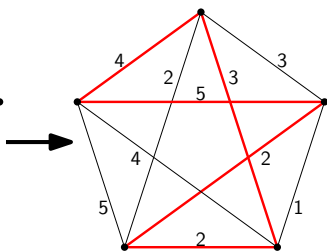
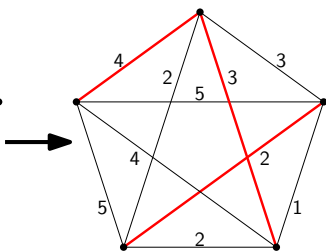


巡回セールスマン問題に対する局所探索法 (2opt 操作に基づく)

- 1 巡回路 T を得る (何かしらの方法で)
- 2 T に 2opt 操作を施して得られた T' の費用が T よりも小さい $\Rightarrow T \leftarrow T'$ として 2 を繰り返す
- 3 そのような T' がない $\Rightarrow T$ を出力して, 停止

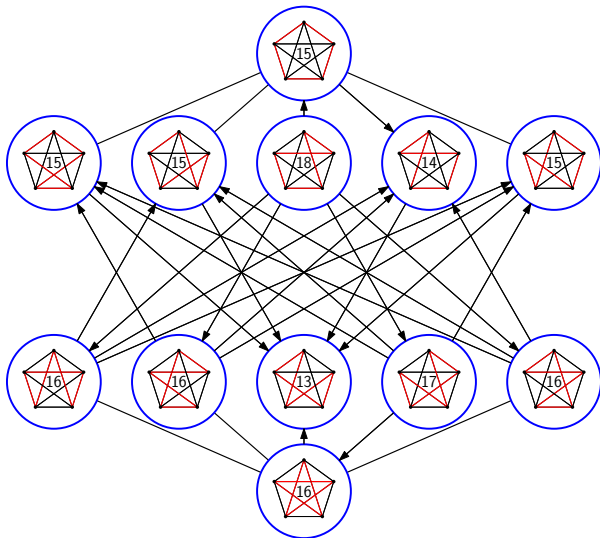


費用 = 16



費用 = 15

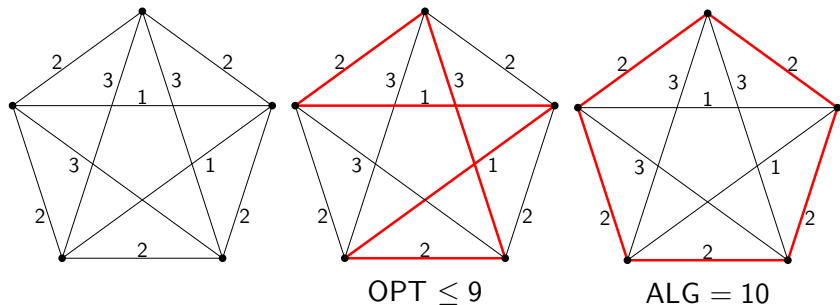
巡回セールスマン問題に対する局所探索法 : 近傍グラフ



アルゴリズム設計で最初に確認すべきこと (再掲)

- ▶ 考えたアルゴリズムは必ず最適解を出力するのか？
 - ▶ 考えたアルゴリズムが最適解を出力しない入力はあるのか？
- ▶ 考えたアルゴリズムの近似比はどれほどなのか？
 - ▶ 考えたアルゴリズムの近似比が悪いことを示す入力はあるのか？

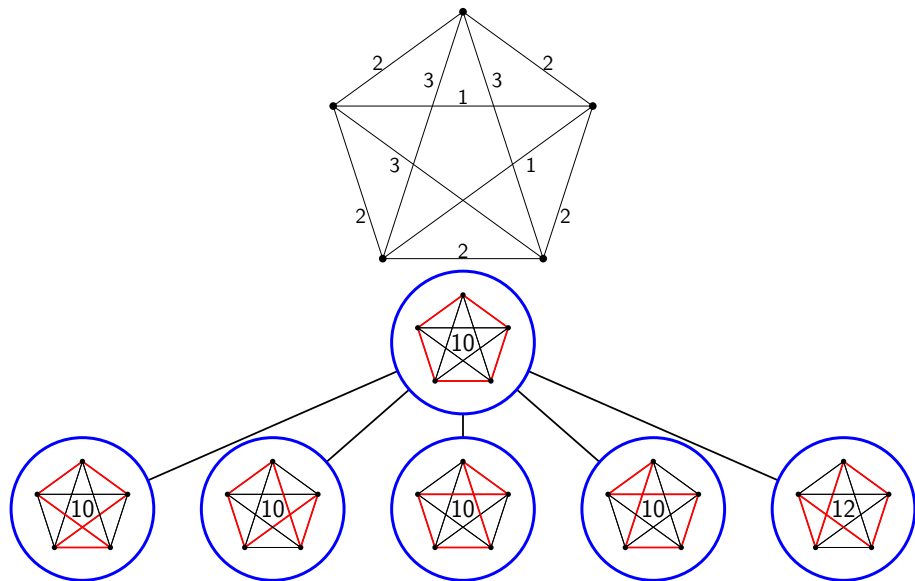
局所探索法が最適巡回回路を出力しない例



この例は

- ▶ 「局所探索法が最適巡回回路を出力しない」ことを示している
 $ALG > OPT$ ($\because ALG = 10 > 9 \geq OPT$)
- ▶ 「局所探索法の近似比が $10/9$ より良くはない」ことを示している
 $ALG \geq \frac{10}{9} OPT$ ($\because ALG = 10 = \frac{10}{9} \cdot 9 \geq \frac{10}{9} OPT$)

局所探索法が最適巡回回路を出力しない例 (続)



局所探索法の近似比は定数で抑えられない

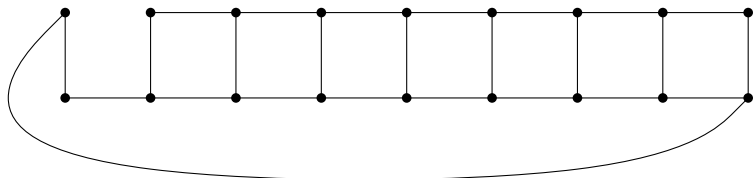
定理 1

(Papadimitriou, Steiglitz '78)

任意の定数 $\alpha \geq 1$ に対して,
巡回セールスマン問題に対する局所探索法の近似比は α より良くはない

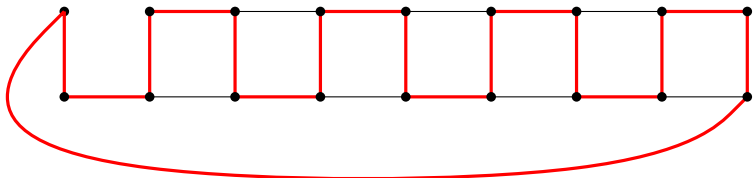
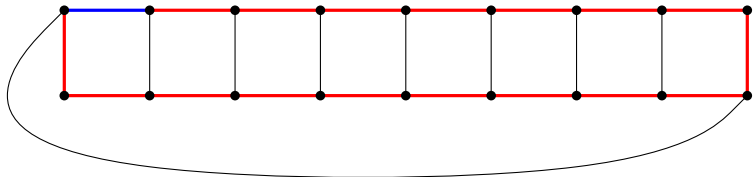
証明: 次のような入力を考える

(Michiels, Aarts, Korst '07)



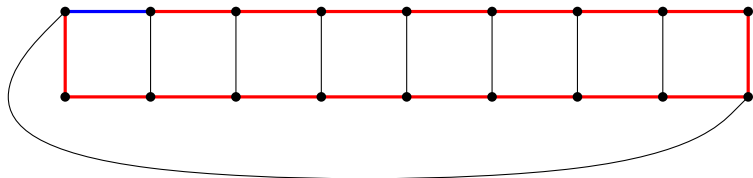
- ▶ これは頂点数 n の完全グラフ
- ▶ 描いてある辺の費用は ϵ ($\epsilon > 0$ は非常に小さな正実数, 後で定める)
- ▶ 描いてない辺の費用は $1 + \epsilon$

定理 1 の証明 (続 1)

▶ $\text{OPT} \leq n\epsilon$ ▶ $\text{ALG} = (1 + \epsilon) + (n - 1)\epsilon = 1 + n\epsilon$ 赤辺の費用は ϵ , 青辺の費用は $1 + \epsilon$

定理 1 の証明 (続 2)

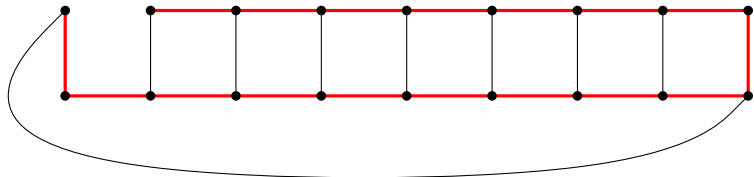
なぜこれが局所探索法の出力なのか？



- ▶ この巡回路に 2opt 操作を施して，費用を下げるにはどうするか？
- ▶ 「青と赤」を除去し，「黒と黒」を追加しないとイケない
- ▶ 除去できる青と追加できる黒は唯一に決まる
- ▶ すると，もう 1 つ黒を追加できないことが分かる
- ▶ ∴ 2opt 操作で，費用を下げることはできない

定理 1 の証明 (続 2)

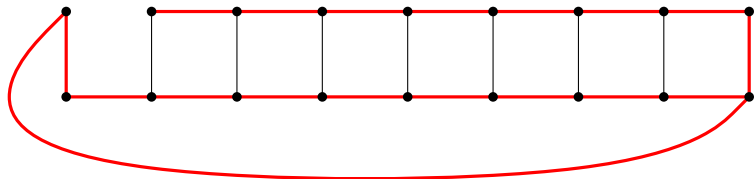
なぜこれが局所探索法の出力なのか？



- ▶ この巡回路に 2opt 操作を施して，費用を下げるにはどうするか？
- ▶ 「青と赤」を除去し，「黒と黒」を追加しないといけない
- ▶ 除去できる青と追加できる黒は唯一に決まる
- ▶ すると，もう 1 つ黒を追加できないことが分かる
- ▶ ∴ 2opt 操作で，費用を下げることはできない

定理 1 の証明 (続 2)

なぜこれが局所探索法の出力なのか？



- ▶ この巡回路に 2opt 操作を施して，費用を下げるにはどうするか？
- ▶ 「青と赤」を除去し，「黒と黒」を追加しないといけない
- ▶ 除去できる青と追加できる黒は唯一に決まる
- ▶ すると，もう 1 つ黒を追加できないことが分かる
- ▶ ∴ 2opt 操作で，費用を下げることはできない

① 局所探索法

② 例 1 : 巡回セールスマン問題

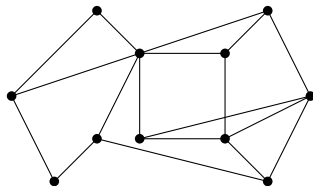
③ 例 2 : 最大カット問題

④ 今日のまとめと補足

最大カット問題

定義: 最大カット問題

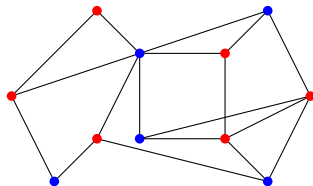
- ▶ 入力: 無向グラフ $G = (V, E)$
- ▶ 出力: G の頂点への赤と青の色割当 (彩色である必要はない)
- ▶ 目的: 2 端点が 2 色で塗られている辺 (2 色辺) の数の**最大化**



最大カット問題

定義: 最大カット問題

- ▶ 入力: 無向グラフ $G = (V, E)$
- ▶ 出力: G の頂点への赤と青の色割当 (彩色である必要はない)
- ▶ 目的: 2 端点が 2 色で塗られている辺 (2 色辺) の数の**最大化**

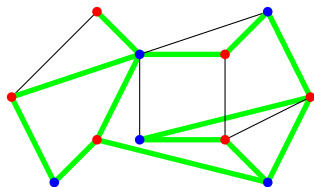


2 色辺の数 = 13

最大カット問題

定義 : 最大カット問題

- ▶ 入力 : 無向グラフ $G = (V, E)$
- ▶ 出力 : G の頂点への赤と青の色割当 (彩色である必要はない)
- ▶ 目的 : 2 端点が 2 色で塗られている辺 (2 色辺) の数の**最大化**



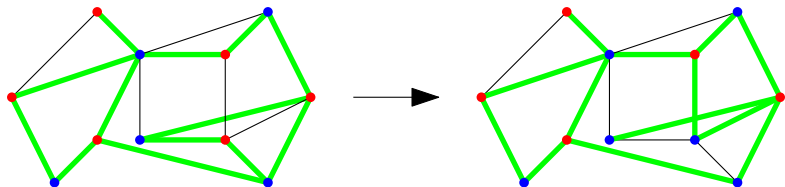
2 色辺の数 = 13

最大カット問題に対する反転操作

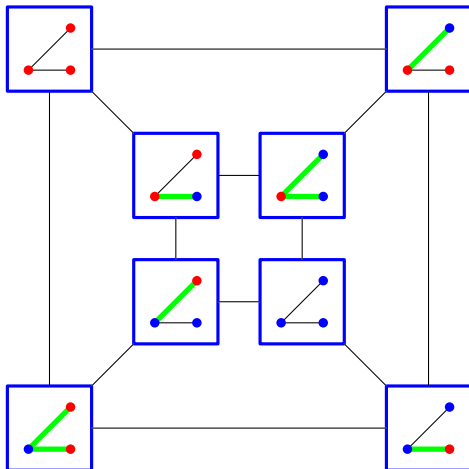
与えられた色割当てに対して、次の操作を考える

(反転操作 (flip) と呼ばれる)

- 1 グラフの頂点を1つ任意に選択する
- 2 その頂点の色を変更する



最大カット問題に対する反転操作 : 近傍グラフ



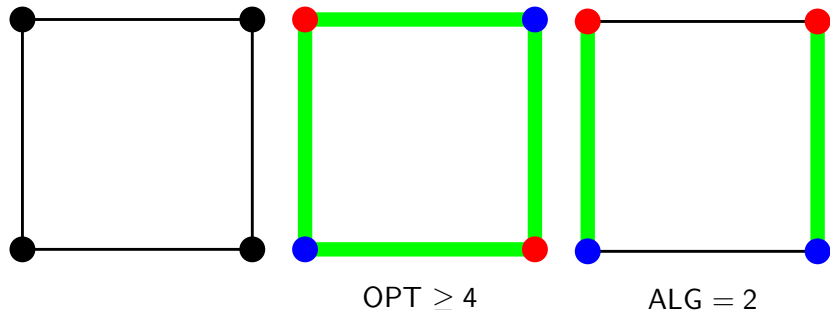
最大カット問題に対する局所探索法

- 1 色割当 A を得る (何かしらの方法で)
- 2 A に反転操作を施して得られた A' の 2 色辺の数が A よりも大 \Rightarrow
 $A \leftarrow A'$ として 2 を繰り返す
- 3 そのような A' が無い $\Rightarrow A$ を出力して, 停止

アルゴリズム設計で最初に確認すべきこと (再掲)

- ▶ 考えたアルゴリズムは必ず最適解を出力するのか？
 - ▶ 考えたアルゴリズムが最適解を出力しない入力はあるのか？
- ▶ 考えたアルゴリズムの近似比はどれほどなのか？
 - ▶ 考えたアルゴリズムの近似比が悪いことを示す入力はあるのか？

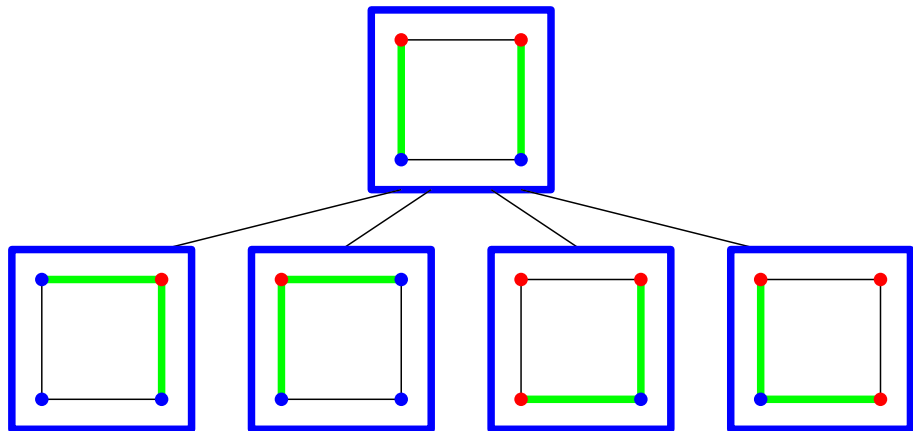
局所探索法が最適解を出力しない例



この例は

- ▶ 「局所探索法が最適解を出力しない」ことを示している
OPT > ALG (\because OPT \geq 4 > 2 = ALG)
- ▶ 「局所探索法の近似比が 2 より良くはない」ことを示している
OPT \geq 2ALG (\because OPT \geq 4 = 2 · 2 = 2ALG)

局所探索法が最適解を出力しない例 (続)



局所探索法の近似比

定理 2

最大カット問題に対する局所探索法の近似比は 2 以下。
すなわち、任意の入力に対して、
局所探索法の出力が与える値 ALG と最適値 OPT に

$$\text{OPT} \leq 2 \cdot \text{ALG}$$

という関係が成り立つ

つまり、

- ▶ 局所探索法の近似比は 2 以下 (定理 2)
- ▶ 局所探索法の近似比は 2 より良くはない (前のスライドの例)
- ▶ \therefore 局所探索法の近似比は 2 であり、これはタイト

定理 2 の証明

証明の流れ: 入力される無向グラフ G の辺数を m として, 次を示す

1 $OPT \leq m$

2 $ALG \geq \frac{1}{2}m$

これを示せば, $OPT \leq m \leq 2 \cdot ALG$ となり, 証明が完了する

示したいこと 1

$$OPT \leq m$$

証明: これは簡単 (どうして?)



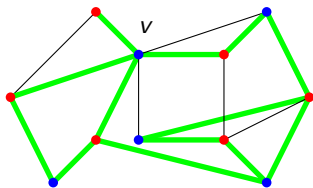
定理 2 の証明 (続 1)

示したいこと 2

$$\text{ALG} \geq \frac{1}{2}m$$

証明 : 局所探索法が出力した色割当を考える

- ▶ 任意の頂点 v に対して, 次の記法を導入
 - ▶ $d(v) = v$ の隣接頂点数 (v の次数)
 - ▶ $d_+(v) = v$ の隣接頂点で, v と同色のものの数
 - ▶ $d_-(v) = v$ の隣接頂点で, v と異色のものの数



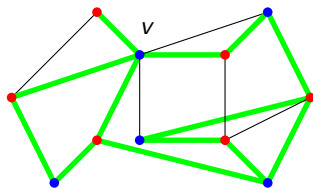
- ▶ $d(v) = 6$
- ▶ $d_+(v) = 2$
- ▶ $d_-(v) = 4$

定理 2 の証明 (続 2)

- ▶ **観察 1** : $d(v) = d_+(v) + d_-(v)$
- ▶ **観察 2** : $d_-(v) \geq d_+(v)$
 - ▶ 局所探索法が出力した色割当だから
- ▶ **観察 3** : $d_-(v) \geq \frac{1}{2}d(v)$
- ▶ **観察 4** : $2m = (d(v) \text{ の和})$
- ▶ **観察 5** : $2 \cdot \text{ALG} = (d_-(v) \text{ の和})$

(観察 1 と 2 より)

(握手補題)

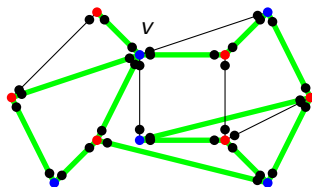


定理 2 の証明 (続 2)

- ▶ **観察 1** : $d(v) = d_+(v) + d_-(v)$
- ▶ **観察 2** : $d_-(v) \geq d_+(v)$
 - ▶ 局所探索法が出力した色割当だから
- ▶ **観察 3** : $d_-(v) \geq \frac{1}{2}d(v)$
- ▶ **観察 4** : $2m = (d(v) \text{ の和})$
- ▶ **観察 5** : $2 \cdot \text{ALG} = (d_-(v) \text{ の和})$

(観察 1 と 2 より)

(握手補題)

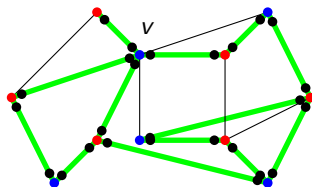


定理 2 の証明 (続 2)

- ▶ **観察 1** : $d(v) = d_+(v) + d_-(v)$
- ▶ **観察 2** : $d_-(v) \geq d_+(v)$
 - ▶ 局所探索法が出力した色割当だから
- ▶ **観察 3** : $d_-(v) \geq \frac{1}{2}d(v)$
- ▶ **観察 4** : $2m = (d(v) \text{ の和})$
- ▶ **観察 5** : $2 \cdot \text{ALG} = (d_-(v) \text{ の和})$

(観察 1 と 2 より)

(握手補題)



定理 2 の証明 (続 3)

よって,

$$2 \cdot \text{ALG} = (d_-(v) \text{ の和}) \quad (\text{観察 5})$$

$$\geq \frac{1}{2} (d(v) \text{ の和}) \quad (\text{観察 3})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2m \quad (\text{観察 4})$$

$$= m$$

すなわち, $\text{ALG} \geq \frac{1}{2}m$



第 4 回のまとめ

近似比

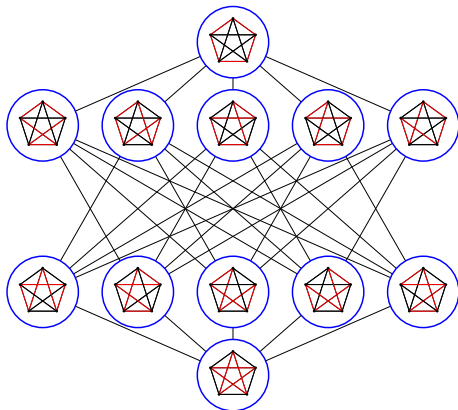
- ▶ $OPT \leq ALG \leq \alpha \cdot OPT$ (最小化問題)
- ▶ $ALG \leq OPT \leq \alpha \cdot ALG$ (最大化問題)

局所探索とその例

- ▶ 巡回セールスマン問題
- ▶ 最大カット問題

局所探索法の設計で留意すべきこと

- ▶ 近傍グラフを思い描くこと
- ▶ 2つの解の間を局所探索の操作で必ず往来できるようにすること
- ▶ 各反復の実行を効率よく行えるようにすること



局所探索法の計算量

注意

紹介した局所探索法は停止まで指数時間かかる例がある

- ▶ 巡回セールスマン問題に対する 2opt 操作
(Lueker '76; Chandra, Karloff, Tovey '99)
 - ▶ (重み付き) 最大カット問題に対する反転操作
(Schäffer, Yannakakis '91)
-
- ▶ 実用上は、ある程度の回数 (あるいは時間) で停止させればよい
 - ▶ しかし、そうすると、近似保証は成り立たなくなるかもしれない

巡回セールスマン問題に対する局所探索法

2opt 操作に基づく局所探索法 (近似比)

- ▶ 辺費用が三角不等式を満たす場合
 - ▶ 近似比は $4\sqrt{n}$ 以下 ($n =$ 頂点数) (Chandra, Karloff, Tovey '99)
 - ▶ 近似比は $\frac{1}{4}\sqrt{n}$ 以上 (Chandra, Karloff, Tovey '99)
- ▶ 頂点が平面上の点, 費用が2点間のユークリッド距離に対応する場合
 - ▶ 近似比は $O(\log n)$ 以下 (Chandra, Karloff, Tovey '99)
 - ▶ 近似比は $\Omega(\frac{\log n}{\log \log n})$ 以上 (Chandra, Karloff, Tovey '99)

その他の操作

- ▶ k -opt : k 個の辺を取り除いて, つなぎ直す
- ▶ Lin-Kernighan : k -opt の探索に枝刈りを適用 (Lin, Kernighan '73)

最大カット問題に対する局所探索法

反転近傍に基づく局所探索法 (計算量 (反復回数))

- ▶ グラフに制限がない：指数時間 (Schäffer, Yannakakis '91)
- ▶ どの頂点の次数も 3： $O(n^2)$ (Poljak '95)
- ▶ 最大次数が 4：指数時間 (Monien, Tscheuschener '10)

参考文献

- ▶ 局所探索法の理論的解析一般
 - ▶ E. Aarts and J.K. Lenstra (eds.). Local Search in Combinatorial Optimization. Princeton University Press, 2003.
 - ▶ W. Michiels, E. Aarts, and J. Korts. Theoretical Aspects of Local Search. Springer, 2007.
 - ▶ E. Angel. A survey of approximation results for local search algorithms. Lecture Notes in Computer Science 3484 (2006) 30-73.
- ▶ 実用的な近似アルゴリズム設計一般 (貪欲法, 局所探索法など)
 - ▶ 柳浦睦憲, 茨木俊秀. 組合せ最適化—メタ戦略を中心として—. 朝倉書店, 2001 年.

参考文献

▶ 参考文献

- ▶ B. Chandra, H. Karloff, C. Tovey. New results on the old k -opt algorithm for the traveling salesman problem. *SIAM Journal on Computing* 28 (1999) 1998-2029.
- ▶ S. Lin, B.W. Kernighan. An efficient heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Operations Research* 21 (1973) 498-516.
- ▶ G. Lueker. Unpublished manuscript, Princeton University, Princeton, NJ, 1975.
- ▶ B. Monien, T. Tscheuschner. On the power of nodes of degree four in the local max-cut problem. *Lecture Notes in Computer Science* 6078 (2010) 264-275.
- ▶ C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz. Some examples of difficult traveling salesman problems. *Operations Research* 26 (1978) 434-443.
- ▶ S. Poljak. Integer linear programs and local search for max-cut. *SIAM Journal on Computing* 24 (1995) 822-839.
- ▶ A.A. Schäffer, M. Yannakakis. Simple local search problems that are hard to solve. *SIAM Journal on Computing* 20 (1991) 56-87.

目次

- ① 局所探索法
- ② 例 1 : 巡回セールスマン問題
- ③ 例 2 : 最大カット問題
- ④ 今日のまとめと補足