情報数理科学特別講義 D ／情報数理科学特別講義 H ／情報数理科学特殊講義 B
第 2 回
制限アプローチ：グラフクラス

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

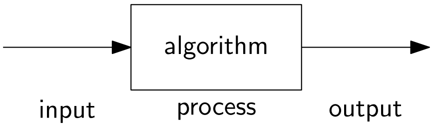
2012 年 8 月 27 日

最終更新：2012 年 8 月 29 日　11:32

アルゴリズムとは

アルゴリズムがすること (簡単に言うと)

- データを受け取り (入力)
- それを処理し (処理)
- 結果を返す (出力)



アルゴリズムに要求されること

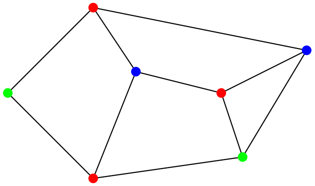
- どんな入力に対しても (入力の普遍性)
- 高速に処理し (処理の高速性)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)

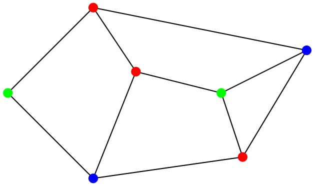
彩色問題

彩色問題

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の彩色
- 目的：使用する色数の最小化

G の彩色：G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの





彩色である

彩色ではない

彩色問題は NP 困難

事実 (Karp '72)

彩色問題は NP 困難

つまり，

帰結

彩色問題に対して

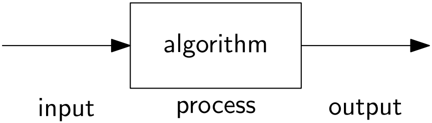
- どんな入力に対しても (入力の普遍性)
- 高速に処理し (処理の高速性)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)

アルゴリズムは存在しないと思われている

緩和の仕方：「入力の普遍性」の緩和 — 制限アプローチ

アルゴリズムに要求されること

- どんな入力に対しても (入力の普遍性)
- 高速に処理し (処理の高速性)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)



「入力の普遍性」の緩和

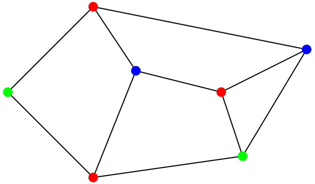
- 一部の入力に対して (入力の普遍性の緩和)
- 高速に処理し (処理の高速性)
- 正しい結果を返す (出力の正当性)

1. 制限アプローチ
2. 染色数とクリーク数の弱双対性
3. 彩色問題と区間グラフ
4. 辺彩色問題と二部グラフ
5. 第 2 回のまとめ

染色数

グラフの染色数

無向グラフ G の**染色数**とは，
G の頂点を塗るために使用する色数の最小値
$\chi(G)$ で表す

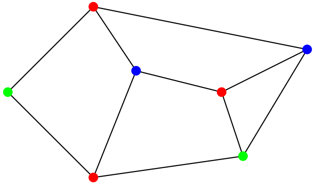


$$\chi(G) = 3$$

染色数

グラフの染色数

無向グラフ G の**染色数**とは，
G の頂点を塗るために使用する色数の最小値
$\chi(G)$ で表す



$\chi(G) = 3$???

疑問

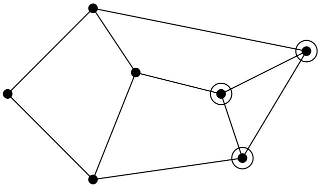
- 3 色未満で塗れないのか？
- 塗れないことをどう示すのか？

$\leftarrow \chi(G) \leq 3$ しか示してない

クリーク

グラフのクリーク

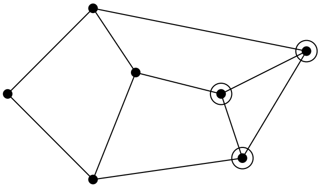
無向グラフ G の**クリーク**とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの
クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



クリーク

グラフのクリーク

無向グラフ G の**クリーク**とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの
クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



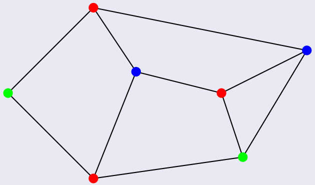
観察

- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？ $\rightsquigarrow$
C を塗るには $|C|$ 色必要

彩色が最適であることの証明の仕方

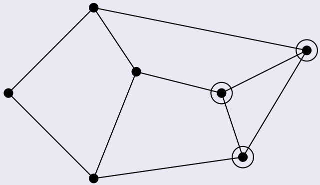
$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

彩色が最適であることの証明の仕方：まとめ

- k 色で塗る　　(つまり，$\chi(G) \le k$)
- 頂点数 k のクリークを見つける　　(つまり，$\chi(G) \ge k$)
- したがって，$\chi(G) = k$

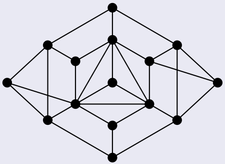
つまり，

彩色問題では，色を塗ることだけではなくて，
クリークを見つけることも重要になる

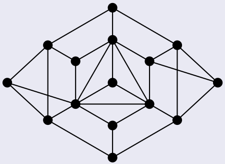
頂点数の大きなクリークが見つけられるとよい

彩色の最適性の証明：例

$\chi(G)$ の上界

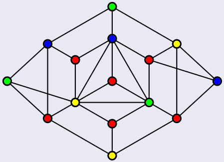


$\chi(G)$ の下界



彩色の最適性の証明：例

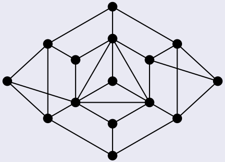
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

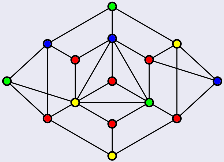
$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



彩色の最適性の証明：例

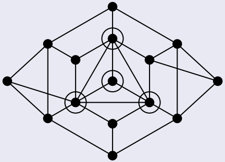
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界

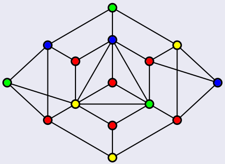


頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

彩色の最適性の証明：例

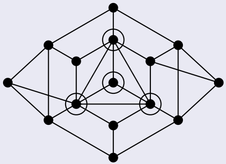
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 4$$

彩色問題がうまく解けそうな場合

任意の無向グラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

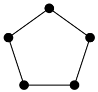
- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (1)

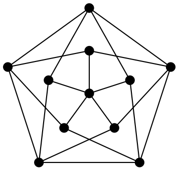
頂点数 5 の閉路 C_5



- $\chi(C_5) = 3$
- $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

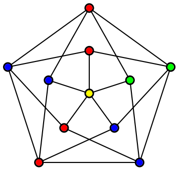
Grötzsch **グラフ**



- $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

Grötzsch **グラフ**



- $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

$\chi(G)$ と $\omega(G)$ の差

定理 (Erdős)

任意の $k_1 > k_2$ に対して
$\chi(G) \geq k_1$ かつ $\omega(G) \leq k_2$ となるグラフ G が存在

例えば，頂点数 n の Erdős-Rényi ランダム・グラフを考えると，高確率で

- $\chi(G) \sim \dfrac{n}{\log n}$
- $\omega(G) \sim \log n$

ここまでのまとめ と ここからの話

ここまでのまとめ

- $\chi(G) = \omega(G)$ となるようなグラフは重要そう
- しかし，どんな G に対してもこの等式が成り立つわけではない
- $\therefore$ どの G に対してこの等式が成り立つのか調べたい

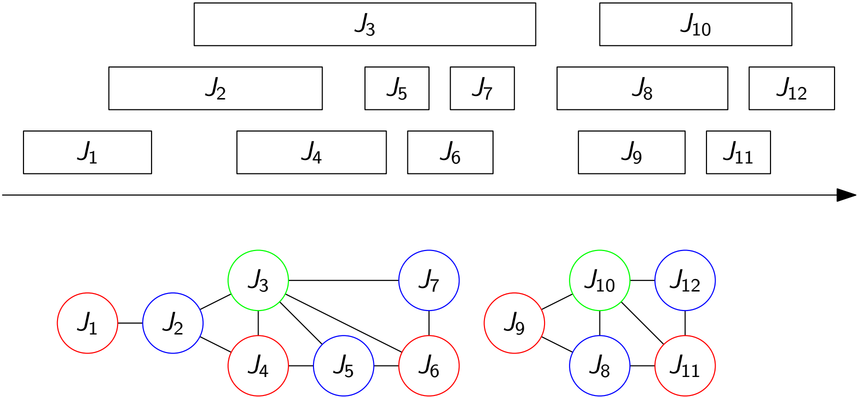
どうして調べたいのか？

- この等式が成り立つとアルゴリズムを作りやすくなる

ここからの話

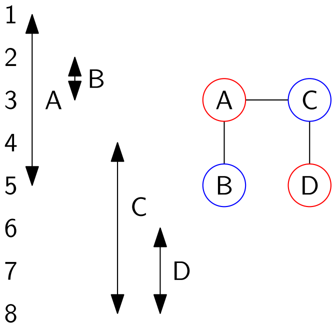
- その等式が成り立つ 2 つの場合
  (区間グラフと二部グラフの線グラフ)
- アルゴリズム

彩色問題が現れる場面：ジョブスケジューリング



彩色問題が現れる場面：レジスタ割当

```
1:  A  =  2
2:  B  =  3
3:  B  =  B  +  2
4:  C  =  A  +  1
5:  A  =  C  +  3
6:  D  =  4
7:  D  =  C  +  2
8:  C  =  3
```



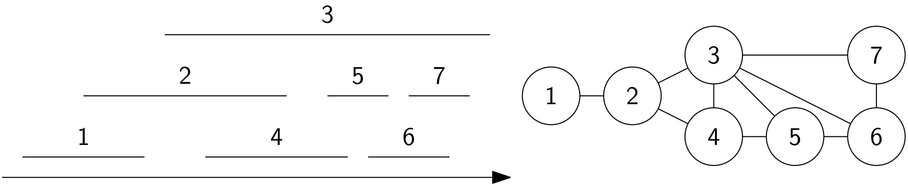

```
1:  R1  =  2
2:  R2  =  3
3:  R2  =  R2  +  2
4:  R2  =  R1  +  1
5:  R1  =  R2  +  3
6:  R1  =  4
7:  R1  =  R2  +  2
8:  R2  =  3
```

ジョブスケジューリングと区間グラフ

定義：区間グラフ

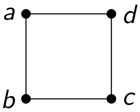
区間グラフとは次のようにして構成できる無向グラフ G

- G の各頂点は数直線上の閉区間に対応
- G の各辺は 2 つの交わる区間に対応



すべてのグラフが区間グラフであるわけではない

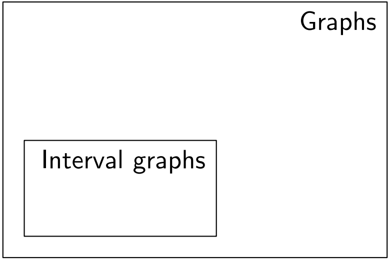
次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



注

区間 $I_1 = [\ell_1, r_1]$ **と** $I_2 = [\ell_2, r_2]$ **が交わる** $\Leftrightarrow \ell_2 \leq r_1$
(ただし， $\ell_1 < \ell_2$**)**

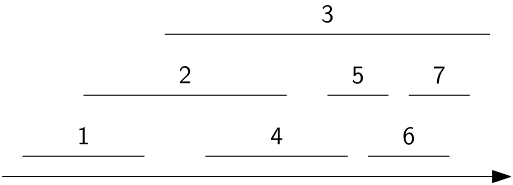
グラフクラス

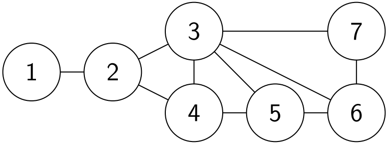


一般のグラフでは難しい彩色問題も
区間グラフでは多項式時間で解ける

区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

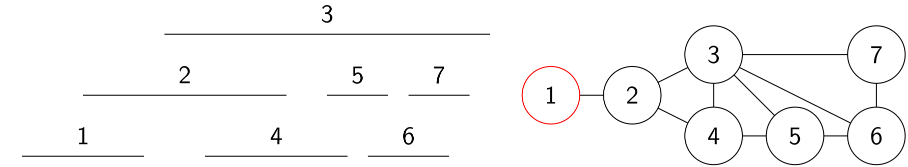
- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える





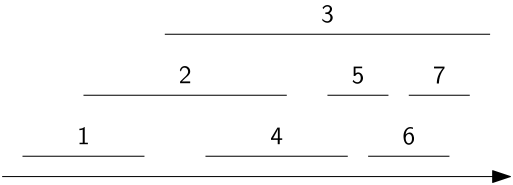
区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

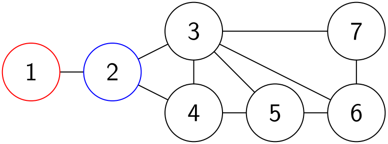
- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

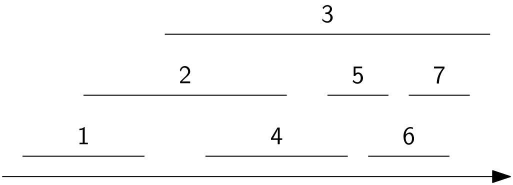
- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える

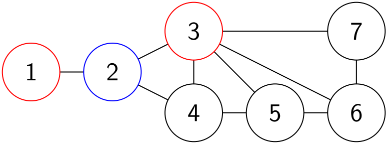




区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

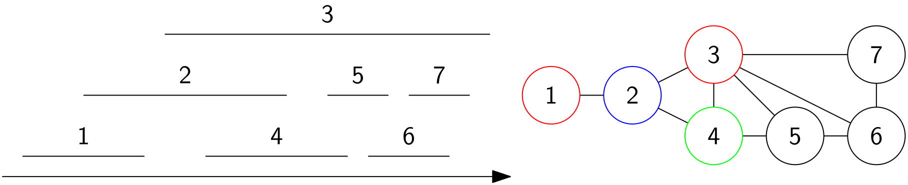
- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える





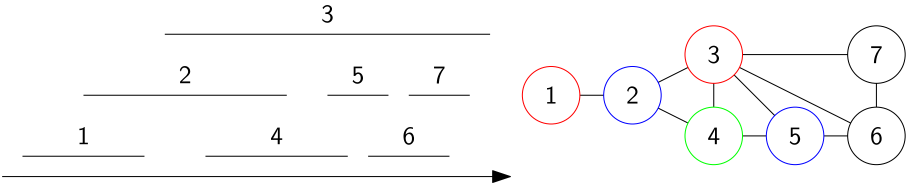
区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



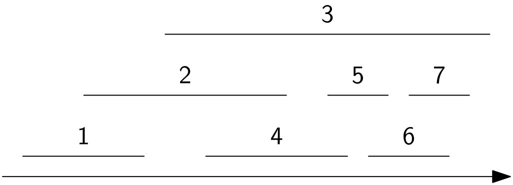
区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

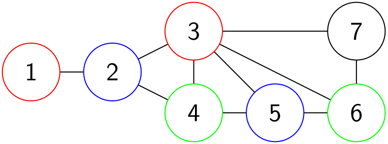
- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

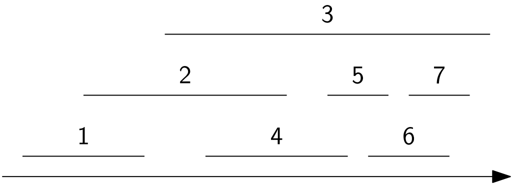
- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える

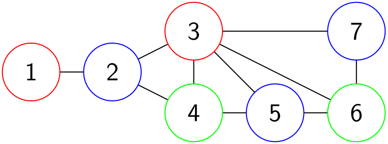




区間グラフと貪欲アルゴリズム：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える





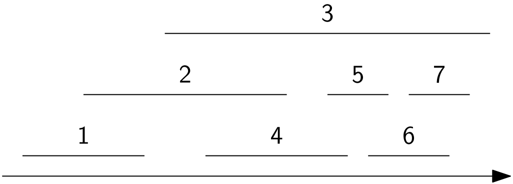
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (1) 再掲

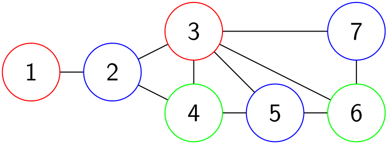
定理 (再掲)

任意の区間グラフに対して，前ページの規則で定めた順序で貪欲アルゴリズムを実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする

- 観察：**数直線上の 1 点 x を含む区間の数** $\leq$ 最小色数
- I を色 k で塗られた最初の頂点に対応する区間とする
  その左端を y とする
- **y を含む区間の数** $\leq$ 最小色数





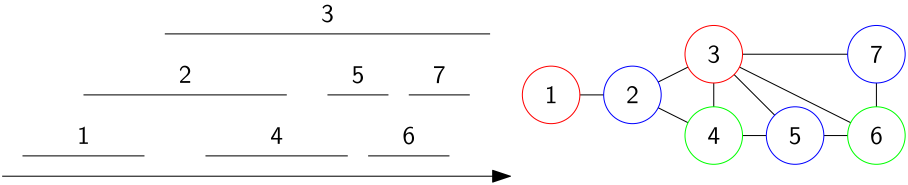
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (2) 再掲

主張

y を含む区間の数 $= k$

主張の証明

- I と交わり，I の左端よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ I に対応する頂点が色 k で塗られた)
- それらは全部 y を含む
- $\therefore$ そのような区間の数 $= k - 1$
- $\therefore$ y を含む区間の数 $= k$ □



区間グラフと貪欲アルゴリズム：再考

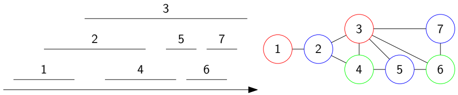
性能解析 (1) までで分かること

- $\chi(G) \leq$ 貪欲アルゴリズムによって得られる色数
- $\omega(G) \geq y$ を含む区間の数
- つまり，

  y を含む区間の数 $\leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq$ 貪欲アルゴリズムによって得られる色数

性能解析 (2) で言っていること

- y を含む区間の数 $=$ 貪欲アルゴリズムによって得られる色数
- $\therefore \chi(G) = \omega(G)$



区間グラフに対する彩色問題：まとめ

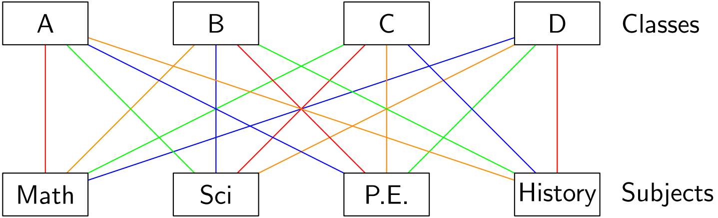
区間グラフ：区間の交わりからできるグラフ

- 区間グラフでないグラフが存在する
- 区間グラフに対して，彩色問題は多項式時間で解ける
- 区間グラフに対して，染色数 $=$ クリーク数 が成り立つ

ボトムライン

区間グラフに対して彩色問題が多項式時間で解ける裏には
「染色数 $=$ クリーク数」という数理的理由が 1 つある

彩色問題が現れる場面 (1)：時間割作成



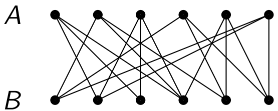
	A	B	C	D
1	Math	P.E.	Sci	History
2	Sci	History	Math	P.E.
3	P.E.	Sci	History	Math
4	History	Math	P.E.	Sci

時間割作成と二部グラフの辺彩色

定義：二部グラフ

二部グラフとは頂点集合 V を次のような 2 つの部分 A, B に分割できるグラフ

- A の 2 頂点の間に辺はない
- B の 2 頂点の間に辺はない

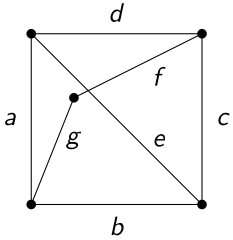


辺彩色は頂点彩色の特殊な場合

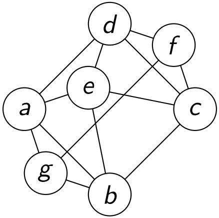
線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ **の線グラフ** $L(G)$ **とは**

- **頂点集合が** E **であり，**
- **辺集合が** $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1$ **と** e_2 **が共通端点を持つ** $\}$



G



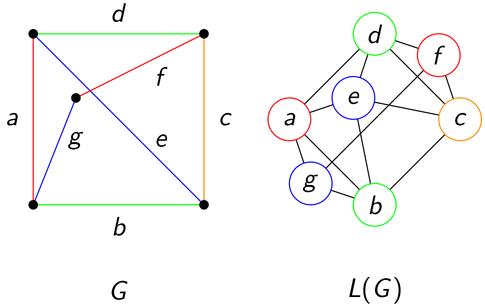
$L(G)$

辺彩色は頂点彩色の特殊な場合

線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の**線グラフ** $L(G)$ とは

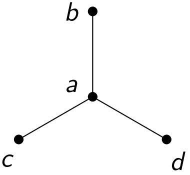
- 頂点集合が E であり，
- 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1$ と e_2 が共通端点を持つ $\}$



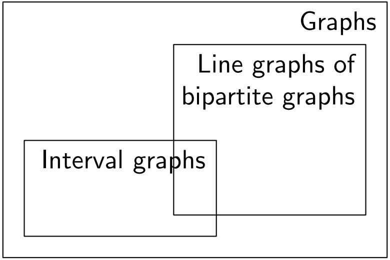
G の辺彩色 $\leftrightarrow$ $L(G)$ の頂点彩色

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

次のグラフは線グラフではない (対応する元のグラフがない)



グラフクラス



一般のグラフでは難しい彩色問題も
二部グラフの線グラフでは多項式時間で解ける
(それをいまから見ていく)

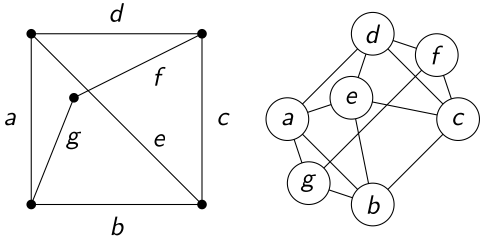
線グラフのクリーク

G の線グラフ $L(G)$

$L(G)$ のクリーク

$L(G)$ のクリークは G において

- 1 頂点を端点として共有する辺の集合，か，
- 三角形

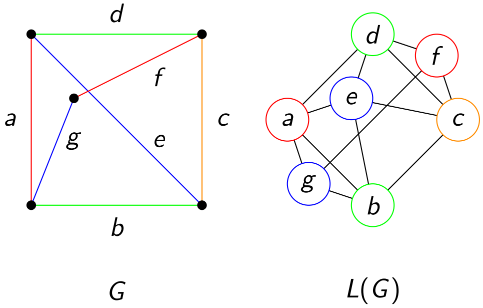


G $L(G)$

二部グラフの辺彩色：下界

観察

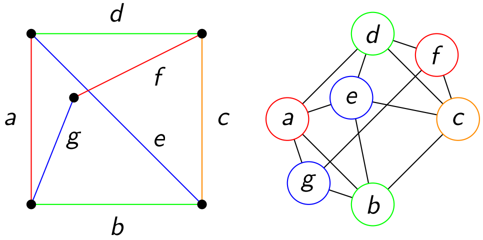
$\chi(L(G)) \geq \Delta(G)$



二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理

定理 (Kőnig)

二部グラフ G に対して，$\chi(L(G)) = \Delta(G)$



G $\quad$ $L(G)$

注意

この定理は G が二部グラフであるから成り立つ

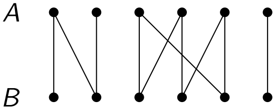
二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (1)

定理 (Kőnig，1916)

二部グラフ G に対して，$\chi(L(G)) = \Delta(G)$

証明：$\Delta(G) = 1$ のときは簡単，$\Delta(G) = 2$ のとき証明する

- このときグラフの連結成分はパスか閉路
- G は二部グラフなので，閉路の頂点数は偶数
- $\therefore$ G の辺は 2 色で塗れる



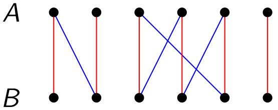
二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (1)

定理 (Kőnig，1916)

二部グラフ G に対して，$\chi(L(G)) = \Delta(G)$

証明：$\Delta(G) = 1$ のときは簡単，$\Delta(G) = 2$ のとき証明する

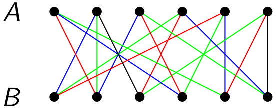
- このときグラフの連結成分はパスか閉路
- G は二部グラフなので，閉路の頂点数は偶数
- $\therefore$ G の辺は 2 色で塗れる



二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (2)

$\Delta(G) \geq 3$ のとき

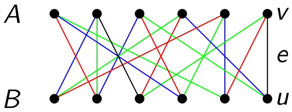
- G の辺を $\Delta(G)$ 色で塗れるだけ塗る
- もし G の辺がすべて塗れたら，おしまい
- そうでなければ，塗れなかった辺 $e = \{u, v\}$ が存在
- u の次数 $\leq \Delta(G)$ なので，u の接続する辺に現れない色が存在 (例えば，赤とする)
- v の次数 $\leq \Delta(G)$ なので，v の接続する辺に現れない色が存在 (例えば，青とする)



二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (2)

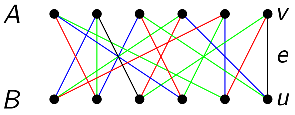
$\Delta(G) \geq 3$ のとき

- G の辺を $\Delta(G)$ 色で塗れるだけ塗る
- もし G の辺がすべて塗れたら，おしまい
- そうでなければ，塗れなかった辺 $e = \{u, v\}$ が存在
- u の次数 $\leq \Delta(G)$ なので，u の接続する辺に現れない色が存在 (例えば，赤とする)
- v の次数 $\leq \Delta(G)$ なので，v の接続する辺に現れない色が存在 (例えば，青とする)



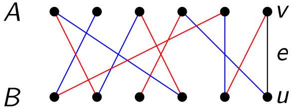
二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (3)

- 赤の辺，青の辺，e だけから成る G の部分グラフ H を考える
- $\Delta(H) \leq 2$
- なので，H の辺はすべて 2 色 (赤と青) で塗れる
- 塗り直した辺彩色は G の辺彩色になる
- これを繰り返すと，全ての辺を塗れる □



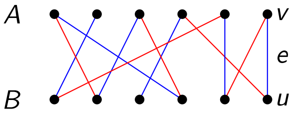
二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (3)

- 赤の辺，青の辺，e だけから成る G の部分グラフ H を考える
- $\Delta(H) \leq 2$
- なので，H の辺はすべて 2 色 (赤と青) で塗れる
- 塗り直した辺彩色は G の辺彩色になる
- これを繰り返すと，全ての辺を塗れる $\square$



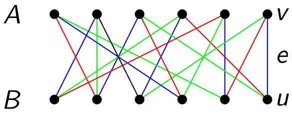
二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (3)

- **赤の辺，青の辺，e だけから成る G の部分グラフ H を考える**
- $\Delta(H) \leq 2$
- **なので，H の辺はすべて 2 色 (赤と青) で塗れる**
- **塗り直した辺彩色は G の辺彩色になる**
- **これを繰り返すと，全ての辺を塗れる** □



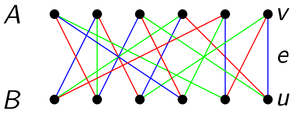
二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (3)

- 赤の辺，青の辺，e だけから成る G の部分グラフ H を考える
- $\Delta(H) \leq 2$
- なので，H の辺はすべて 2 色 (赤と青) で塗れる
- 塗り直した辺彩色は G の辺彩色になる
- これを繰り返すと，全ての辺を塗れる $\square$



二部グラフの辺彩色：Kőnig の定理 — 証明 (3)

- 赤の辺，青の辺，e だけから成る G の部分グラフ H を考える
- $\Delta(H) \leq 2$
- なので，H の辺はすべて 2 色 (赤と青) で塗れる
- 塗り直した辺彩色は G の辺彩色になる
- これを繰り返すと，全ての辺を塗れる $\square$



証明から得られるアルゴリズム

次のようにして二部グラフ G の辺集合を $\Delta(G)$ 色で塗れる

1. **G の辺 e を順に見ていく**
2. **e の両端点に現れていない色があるとき，e をその色で塗る**
3. **e の両端点に $\Delta(G)$ 色現れているとき，**
   証明にある手続きによって，塗り方を変更して，e も塗る
4. **これを繰り返す**

このアルゴリズムの計算時間は G の頂点数，辺数の多項式

二部グラフに対する辺彩色問題：まとめ

線グラフ：元のグラフの辺集合を頂点集合とするグラフ

- G の辺彩色 $=$ $L(G)$ の頂点彩色
- 線グラフではないグラフが存在する

二部グラフ：辺を持たない 2 つの部分に分割できるグラフ

- 二部グラフに対して，辺染色数 $=$ 最大次数が成り立つ
- 二部グラフに対して，辺彩色問題は多項式時間で解ける

ボトムライン

二部グラフに対して辺彩色問題が多項式時間で解ける裏には「辺染色数 $=$ 最大次数」という数理的理由が 1 つある

第 2 回のまとめ

彩色問題と弱双対性

- 染色数 $\geq$ クリーク数
- 辺染色数 $\geq$ 最大次数

弱双対性の使い方

- k 色で塗れたら，染色数 $\leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかったら，染色数 $\geq k$
- $\therefore$ 弱双対性から，染色数 $= k$

染色数 $=$ クリーク数となるグラフクラス

- 区間グラフ
- 二部グラフの線グラフ

補足：二部グラフの辺彩色

多項式時間で解けるが，その計算量

現在の最速

$O(m \log \Delta)$ (Cole, Ost, Schirra, 2001)

ただし，m は辺数，Δ は最大次数

- **「単純」な $O(m \log \Delta)$ 時間アルゴリズムがあるかどうか，未解決**

補足：理想グラフ

事実

$\chi(G) = \omega(G)$ であるグラフに限っても
彩色問題は NP 困難

双対性がうまく使えるためにはもっと条件が必要

理想グラフ

無向グラフ G が**理想グラフ**であるとは，
G の任意の誘導部分グラフ H に対して $\chi(H) = \omega(H)$ となること

区間グラフも二部グラフの線グラフも理想グラフ

事実 (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1988)

理想グラフに対して彩色問題は多項式時間で解ける

これは組合せ最適化における最も強力な結果の一つ

参考文献

- **グラフクラスについて**

  - M.C. Golumbic. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, 2nd Edition. Elsevier, 2004.
  - A. Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad, Graph Classes: A Survey. SIAM, 1999.
  - **上原隆平，グラフクラスとアルゴリズム．** http://www.jaist.ac.jp/˜uehara/etc/graph-class/index.html
  - H.N. de Ridder et al. Information System on Graph Classes and their Inclusions (ISGCI), http://www.graphclasses.org

参照文献

- R. Cole, K. Ost, S. Schirra, Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time, Combinatorica **21** (2001) 5–12.
- D. König, Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére, Mathematikai és Természettudományi Értesitö **34** (1916) 104–119.
- M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. Springer-Verlag, 1988.

目次