情報数理科学特別講義 D ／情報数理科学特別講義 H **2012 年 8 月 27/28 日**
情報数理科学特殊講義 B **岡本 吉央**

1 組合せ最適化による現実問題へのアプローチ (計算困難問題の対処法)

演習問題 1. 円グラフとは，平面上に与えられた (半径が同じであるとは限らない) 円の集合に対して，1 つ 1 つの円を頂点に対応させて，交わる 2 つの円と重なる 2 つの円を辺に対応させることででき上がる無向グラフである．

円グラフに対する彩色問題を考える．貪欲アルゴリズムを適用する頂点上の順序をうまく設定することで，貪欲アルゴリズムの出力する色数 ALG と最小の色数 OPT の間に

$$\mathrm{ALG} \leq 6 \cdot \mathrm{OPT} - 5$$

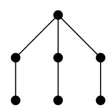
が成り立つことを証明せよ．

演習問題 2. 彩色問題に対して次の事項を証明せよ．「任意の無向グラフ G に対して，その頂点上のある順序が存在して，その順序に対して貪欲アルゴリズムを適用すると色数最小の彩色が得られる．」(ヒント：色数最小の彩色が与えられたとして，その彩色からうまい順序を構成してみよ．)

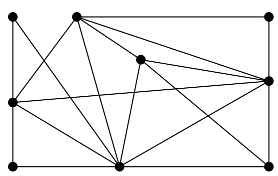
観念的演習問題 3. 講義では，現実世界のいくつかの問題が彩色問題としてモデル化されるとしたが，現実世界の問題はもっと複雑であり，単に彩色問題としてモデル化されるとすることは現実を直視していないという意見もありうる．もしそうであるとしたら，彩色問題を研究する意義があるのだろうか？ あるいは，もしそうであるとしても，彩色問題を研究する意義があるとすれば，どういう意義に沿うものなのだろうか？

2 制限アプローチ：グラフクラス

演習問題 4. 次のグラフが区間グラフではないことを証明せよ．



演習問題 5. 次のグラフに対して，色数最小の彩色を見つけよ．また，その彩色が色数最小であることの説明もせよ．



観念的演習問題 6. 現実世界におけるデータにはノイズや誤差がつきものである．そのため，本来は区間グラフや二部グラフが得られなくてはならない状況であるにも関わらず，ノイズ等のために，そうならない場合がある．そのようなノイズや誤差がある状況においても，制限アプローチは有効なのだろうか？

3　近似アプローチ：貪欲法

演習問題 7. 講義で扱った同一機械並列スケジューリング問題を考える．

1. 機械数 m が 3 の場合に，貪欲アルゴリズムの出力するスケジュールの最終完了時刻が最適スケジュールの最終完了時刻の 5/3 倍以上になるような問題例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)

2. 貪欲アルゴリズムではジョブを任意の順序で見ていった．その代わりに，処理時間の大きなジョブから順に見ていくという順序を用いて貪欲アルゴリズムを実行することを考える．このように貪欲アルゴリズムを変更した場合，機械数 m が 2 のときに，アルゴリズムの出力するスケジュールの最終完了時刻が最適スケジュールの最終完了時刻の 7/6 倍以上になるような問題例を構成せよ．(なぜそのような性質を満たすのかも説明せよ．)

観念的演習問題 8. 講義では，近似アルゴリズムの性能を「近似比」で定量化した．これは妥当だろうか？例えば，アルゴリズムの出力値と最適値の差で近似アルゴリズムの性能を定量化することは悪い考えなのだろうか？ 近似アルゴリズムの性能の定量化として，他のものは考えられないのだろうか？

4　近似アプローチ：局所探索法

演習問題 9. 最大カット問題は 2 つの色で頂点を塗ったが，3 色で頂点を塗る変種を考える．つまり，入力は無向グラフ $G = (V, E)$ で，出力は G の頂点全体に対する赤，青，緑の色割当である (これが彩色になっている必要はない)．目的は両端点が異なる色で塗られている辺の数の最大化である．

この問題に対して,「頂点を 1 つ選び，その頂点の色を変更する」という操作により解の改善を繰り返す局所探索法を考える．

1. この局所探索法が最適解を出力しない例を構成せよ．(なぜ最適解を出力しないのかも説明せよ．)

2. この局所探索法の近似比が 3/2 以下であることを証明せよ．

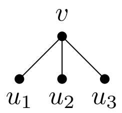
観念的演習問題 10. 講義で扱った局所探索法では，最大化するべき値 (あるいは最小化するべき値) が常に改善するような移動を繰り返した．では，そうではなく，改善しないような移動も許す局所探索法を考えるとどうなるのだろうか？ そのような考えは妥当なのだろうか？ 妥当であるとすれば，それに基づくアルゴリズムを設計する上で留意すべき事項は何だろうか？

5　厳密アプローチ：分枝限定法

演習問題 11. 頂点被覆問題を考える．

1. 入力として与えられる無向グラフにおいて，すべての頂点の次数が 2 以下であるとする．そのとき，頂点被覆問題を多項式時間で解くアルゴリズムを与えよ．(なぜ，多項式時間で解けるのかも説明せよ．) (ヒント：すべての頂点の次数が 2 以下である無向グラフにおいて，各連結成分はどのようなグラフになっているのか，考えてみよ．)

2. 頂点被覆問題に対する分枝限定アルゴリズムとして，下図の部分構造に着目するものを考える．



すなわち，この部分構造がグラフ G に存在するとき，G の頂点被覆は v を含むか，あるいは $\{u_1, u_2, u_3\}$ の 3 頂点を含まなければならない (両者とも成立することもありうる)．このことから，G に頂点数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は，$G - v$ に頂点数 $k-1$ の頂点被覆が存在するか，あるいは，$G - \{u_1, u_2, u_3\}$ に頂点数 $k-3$ の頂点被覆が存在することであることが分かる．

以上の観察に基づいて，次のような頂点被覆問題に対する分枝限定アルゴリズムの実行 $\mathrm{BB3}(G, k)$ を考える．

Step 1: G に辺が存在しないとき，Yes を出力して停止．

Step 2: G に辺が存在し，$k \leq 0$ のとき，No を出力して停止．

Step 3: G のすべての頂点の次数が 2 以下であるとき，前問の多項式時間アルゴリズムを用いて解き，その出力をそのままアルゴリズムの出力として停止．

Step 4: この段階に到達したとき，G に辺が存在し，ある頂点の次数は 3 以上である．すなわち，上の図のような構造が G に存在する．それを 1 つ見つける．そして，$\mathrm{BB3}(G - v, k-1)$ か $\mathrm{BB3}(G - \{u_1, u_2, u_3\}, k-3)$ のいずれかが Yes を出力するとき，Yes を出力して停止．そうでないとき，No を出力して停止．

この分枝限定アルゴリズムの計算木の葉数が $O(1.466^k)$ になることを証明せよ．ただし，方程式 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ の唯一の正実数解は (小数点以下第 4 位を切り上げると) 1.466 である，という事実を用いてもよい．

観念的演習問題 12. 講義では，頂点被覆問題に対する分枝限定法として辺に着目する方法と長さ 2 のパスに着目する方法を取り扱い，長さ 2 のパスに着目する方法で，計算量の改善が見られた．このように，グラフの中のより大きな部分構造に着目することで更に計算量を改善することは可能なのだろうか？ 改善が可能であるとして，そこには限界があるのだろうか？ 大きな部分構造に着目する際に，留意すべき事項は何だろうか？

6 厳密アプローチ：前処理による問題の縮小

演習問題 13. 頂点被覆問題を考える．入力として無向グラフ G と自然数 k の対 $\langle G, k\rangle$ が与えられる．

1. グラフ G に次数 1 の頂点 v が存在すると仮定し，v の隣接頂点を u とする．このとき，G に要素数 k の頂点被覆が存在するための必要十分条件は $G - u$ に要素数 $k-1$ の頂点被覆が存在することである．これを証明せよ．

2. 前問より，頂点被覆問題に対する次のような前処理規則を考えることができる．

    規則 3：G に次数 1 の頂点 v が存在するとき，$\langle G, k\rangle$ を $\langle G - u, k-1\rangle$ に置き換える．ただし，u は G における v の隣接頂点である．

    規則 1，2，3 の適用ができない入力 $\langle G, k\rangle$ を考える．このとき，$\langle G, k\rangle$ に対する出力が Yes であるならば，G の頂点数は k^2 以下であることを証明せよ．

観念的演習問題 14. 講義で考えた前処理法では，前処理を適用する前の入力に対する Yes/No の出力と前処理を適用した後の入力に対する Yes/No の出力が合致しており，それが重要な点であった．もし，この合致がない場合，何が起こるのだろうか？ 合致がなくても，アルゴリズム設計において何か有用な性質を保証する (証明する) ことはできるのだろうか？ そのような性質としてどのようなものが考えられるだろうか？