2と3の違い

岡本 吉央
電気通信大学

今日の話

2と3の違い

- 問題の難しさが「2」と「3」で変わるという現象

メッセージ

- 計算理論において「現象」というものがある
- 特に，問題の難しさが急激に変わる，という現象

今日の話の流れ

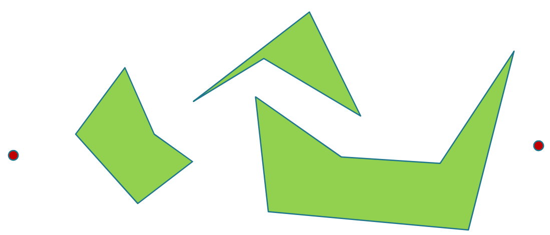
- パート1：2と3の違い アラカルト
  - 「2と3の違い」 の現象の例をいくつか見ていく
- パート2：充足可能性問題に焦点を絞って
  - 充足可能性問題の難しさが急激に変わる現象を特に詳しく見ていく
- パート3：パラメータ化計算量理論
  - どんな問題も急激に変わる現象を見せるのか？

2と3の違い アラカルト

例1：2次元の最短路問題

2

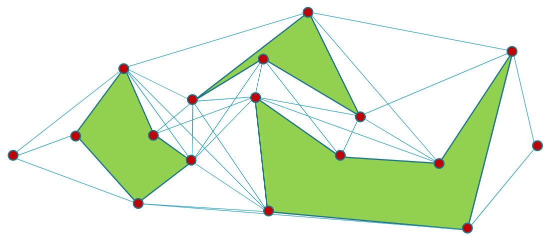
- 多角形障害物のある平面上の環境
- 指定された始点と終点を結ぶ最短経路を探す



例1：2次元の最短路問題

2

- これは効率よく解ける
  - 可視性グラフ (visibility graph) を構成する

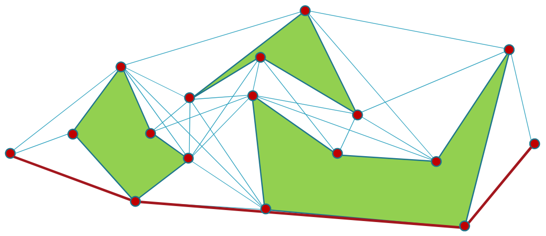


例1：2次元の最短路問題

2

7

- これは効率よく解ける
  - 可視性グラフ上でDijkstra法を実行する

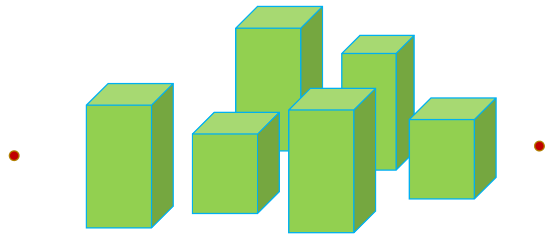


例1：3次元の最短路問題

3

8

- 多面体障害物のある3次元空間内の環境
- 指定された始点と終点を結ぶ最短経路を探す



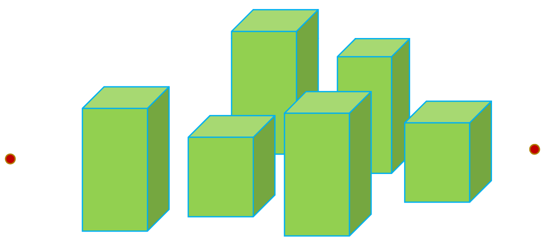
例1：3次元の最短路問題

3

9

- この問題はNP困難

(Canny & Reif '87)



復習：NP困難性

10

計算の理論では
- 効率よく解ける問題 ＝ 多項式時間で解ける問題

問題が効率よく解けないことを証明するのは難しい

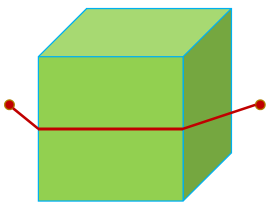
代わりに，問題がNP困難であることを証明する
- NP困難問題が効率よく解けるかどうか未解決
- NP困難問題は効率よく解けないと思う人が多い

例1：3次元の最短路問題

3

11

どうして難しいか？
- 最短路が障害物の頂点で曲がるとは限らない



2と3の違い

12

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題

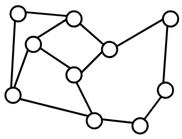
効率よく解ける　　効率よく解けなそう

例2：グラフの2彩色可能性

2

13

- 無向グラフ
- 各辺の両端が違う色となる2色の割当があるか？

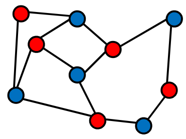


例2：グラフの2彩色可能性

2

14

- 無向グラフ
- 各辺の両端が違う色となる2色の割当があるか？

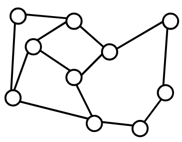


例2：グラフの2彩色可能性

2

15

- この問題は効率よく解ける
  - 辺を1つずつたどり，2色で塗って，矛盾なければOK

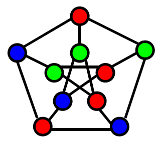


例2：グラフの3彩色可能性

3

16

- 無向グラフ
- 各辺の両端が違う色となる3色の割当があるか？



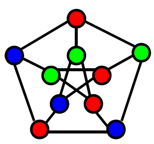
例2：グラフの3彩色可能性

3

17

- 無向グラフ
- 各辺の両端が違う色となる3色の割当があるか？
- この問題はNP困難

(Karp '72)



2と3の違い

18

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性

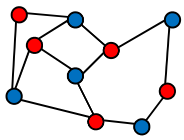
効率よく解ける	効率よく解けなそう

例3：グラフの2彩色可能性

2

19

- 無向グラフ
- 各辺の両端が違う色となる2色の割当があるか？

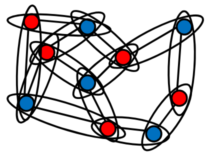


例3：グラフの2彩色可能性

2

20

- 別の見方：辺 ＝ 頂点の2個組

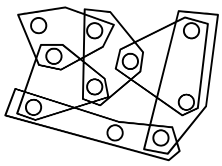


例3：3-グラフの2彩色可能性

3

21

- 3-グラフ：辺 ＝ 頂点の3個組
- 2色の割当で，各辺に2色とも出るものがあるか？

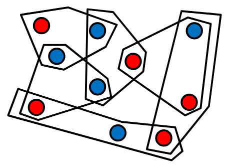


例3：3-グラフの2彩色可能性

3

22

- 3-グラフ：辺 ＝ 頂点の3個組
- 2色の割当で，各辺に2色とも出るものがあるか？



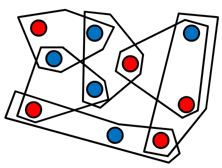
例3：3-グラフの2彩色可能性

3

23

- この問題はNP困難

(Lovász '73)



2と3の違い

24

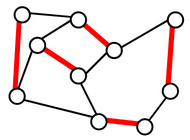
2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
効率よく解ける	効率よく解けなそう

例4：グラフの完全マッチング

2

25

- 無向グラフ
- 辺部分集合ですべての頂点をちょうど一度ずつ覆うものは存在するか？



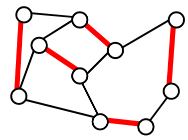
例4：グラフの完全マッチング

2

26

- これは効率よく解くことができる

(Edmonds '65)

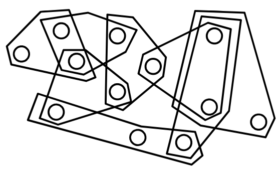


例4：3-グラフの完全マッチング

3

27

- 3-グラフ
- 辺部分集合ですべての頂点をちょうど一度ずつ覆うものは存在するか？

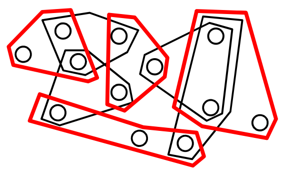


例4：3-グラフの完全マッチング

3

28

- 3-グラフ
- 辺部分集合ですべての頂点をちょうど一度ずつ覆うものは存在するか？



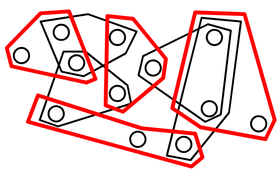
例4：3-グラフの完全マッチング

3

29

- この問題はNP困難

(Karp '72)



2と3の違い

30

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
グラフの完全マッチング	3-グラフの完全マッチング

↑ 効率よく解ける

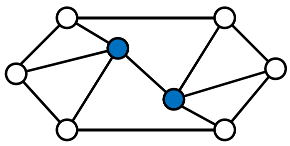
↑ 効率よく解けなそう

例5：最小2端子カット

2

31

- 無向グラフ，端子t_1，t_2
- t_1，t_2を分離する辺集合で辺数最小のものは？

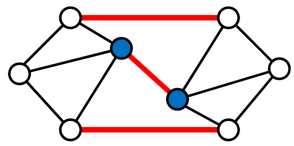


例5：最小2端子カット

2

32

- 無向グラフ，端子t_1，t_2
- t_1，t_2を分離する辺集合で辺数最小のものは？



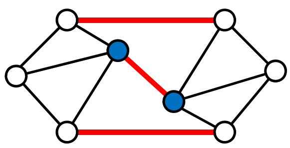
例5：最小2端子カット

2

33

- この問題は効率よく解ける

(Dinic '70, Edmonds, Karp '72)

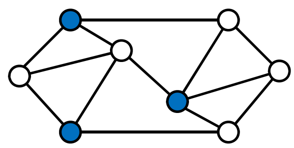


例5：最小3端子カット

3

34

- 無向グラフ，端子t_1，t_2，t_3
- t_1，t_2，t_3を分離する辺集合で最小のものは？

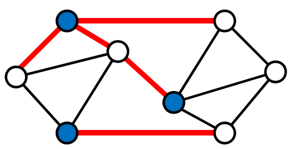


例5：最小3端子カット

3

35

- 無向グラフ，端子t_1，t_2，t_3
- t_1，t_2，t_3を分離する辺集合で最小のものは？



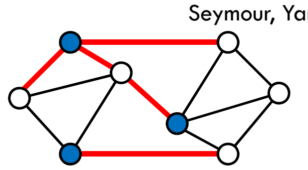
例5：最小3端子カット

3

36

- この問題はNP困難

(Dahlhaus, Johnson, Papadimitriou, Seymour, Yannakakis '94)



2と3の違い

37

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
グラフの完全マッチング	3-グラフの完全マッチング
最小2端子カット	最小3端子カット

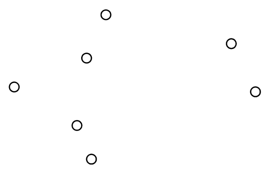
効率よく解ける　　効率よく解けなそう

例6：Tverberg2分割

2

38

- d次元空間に有限個の点
- 2分割して，それらの凸包を交わらせられるか？

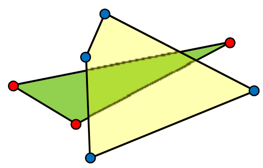


例6：Tverberg2分割

2

39

- d次元空間に有限個の点
- 2分割して，それらの凸包を交わらせられるか？

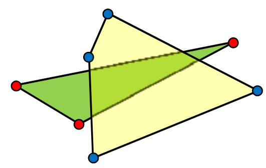


例6：Tverberg2分割

2

40

- d次元空間に有限個の点
- 2分割して，それらの凸包を交わらせられるか？
- これは効率よく判定可能

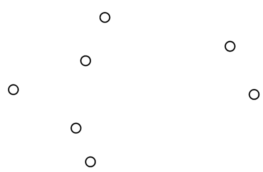


例6：Tverberg3分割

3

41

- d次元空間に有限個の点
- 3分割して，それらの凸包を交わらせられるか？

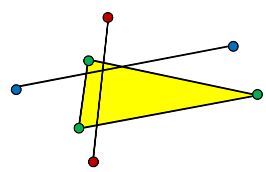


例6：Tverberg3分割

3

42

- d次元空間に有限個の点
- 3分割して，それらの凸包を交わらせられるか？



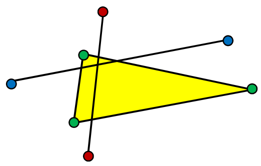
例6：Tverberg3分割

3

43

- d次元空間に有限個の点
- 3分割して，それらの凸包を交わらせられるか？
- この問題はNP困難

(Kalai '01)



2と3の違い

44

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
グラフの完全マッチング	3-グラフの完全マッチング
最小2端子カット	最小3端子カット
Tverberg2分割	Tverberg3分割

効率よく解ける	効率よく解けなそう

例7：2充足可能性問題 (2SAT)

2

45

- 連言標準形命題論理式，各節のリテラル数 = 2
- この論理式を充足する真理値割当はあるか？

$$(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_4} \vee x_1) \wedge (\overline{x_5} \vee x_3) \wedge (x_5 \vee x_1)$$

0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$$

例7：2充足可能性問題 (2SAT)

2

46

- これは効率よく解ける

(Krom '67)

$$(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_4} \vee x_1) \wedge (\overline{x_5} \vee x_3) \wedge (x_5 \vee x_1)$$

0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$$

例7：3充足可能性問題 (3SAT)

3

47

- 連言標準形命題論理式，各節のリテラル数 = 3
- この論理式を充足する真理値割当はあるか？

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$$

例7：3充足可能性問題 (3SAT)

3

48

- 連言標準形命題論理式，各節のリテラル数 = 3
- この論理式を充足する真理値割当はあるか？
- この問題はNP困難

(Karp '72)

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$$

2と3の違い

49

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
グラフの完全マッチング	3-グラフの完全マッチング
最小2端子カット	最小3端子カット
Tverberg2分割	Tverberg3分割
2充足可能性問題	3充足可能性問題
↑ 効率よく解ける	↑ 効率よく解けなそう

どうして2と3に違いがあるのか？

50

- 満足な解答は得られていない
- 3と4に違いがある場合もある
- 4と5に違いがある場合もある
- 5と6・・・
- このような違いが説明できないことは計算理論が十分に発達していないことの証

今日の話の流れ

51

- パート1：2と3の違い アラカルト
  - 「2と3の違い」の現象の例をいくつか見ていく
- パート2：充足可能性問題に焦点を絞って
  - 充足可能性問題の難しさが急激に変わる現象を特に詳しく見ていく
- パート3：パラメータ化計算量理論
  - どんな問題も急激に変わる現象を見せるのか？

充足可能性問題

2と3の違い

53

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
グラフの完全マッチング	3-グラフの完全マッチング
最小2端子カット	最小3端子カット
Tverberg2分割	Tverberg3分割
2充足可能性問題	3充足可能性問題
↑ 効率よく解ける	↑ 効率よく解けなそう

変数の生起回数による細分化

54

- 連言標準形命題論理式における各変数の生起回数に着目
- x_1 は2回, x_2 は2回, x_3 は3回, x_4 は2回

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee x_4)$$

(k, s)充足可能性問題 ((k, s)-SAT)

55

- 連言標準形命題論理式
  - 各節のリテラル数 = k
  - 各変数の生起回数 ≦ s
- この論理式を充足する真理値割当はあるか？

$$(\overline{x_1} \lor x_2 \lor x_3) \land (\overline{x_2} \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \overline{x_3} \lor x_4)$$

これは (3, 3)-SATの入力

(3, s)-SATに対する事実

56

- s ≦ 3 のとき，(3, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(3, s)-SATは自明な問題)
- s ≧ 4 のとき，(3, s)-SATはNP困難

(Tovey '84)

(4, s)-SATに対する事実

57

- s ≦ 4 のとき，(4, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(4, s)-SATは自明な問題) (Tovey '84)
- s ≧ 6 のとき，(4, s)-SATはNP困難

(Dubois '90)

(5, s)-SATに対する事実

58

- s ≦ 5 のとき，(5, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(5, s)-SATは自明な問題) (Tovey '84)
- s ≧ 11 のとき，(5, s)-SATはNP困難

(Dubois '90)

(k, s)-SATに対する事実

59

任意の k≧3に対して，ある f(k) が存在し次が成立

- s ≦ f(k) のとき，(k, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(k, s)-SATは自明な問題)
- s ≧ f(k) + 1 のとき，(k, s)-SATはNP困難

(Kratochvíl, Savický, Tuza '93)

(3, s)-SATに対する事実

60

- s ≦ 3 のとき，(3, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(3, s)-SATは自明な問題)
- s ≧ 4 のとき，(3, s)-SATはNP困難

(Tovey '84)

- つまり，f(3) = 3

(4, s)-SATに対する事実

61

- s ≦ 4 のとき，(4, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(4, s)-SATは自明な問題) (Tovey '84)
- s ≧ 6 のとき，(4, s)-SATはNP困難 (Dubois '90)
- つまり，4 ≦ f(4) ≦ 5

(4, s)-SATに対する事実

62

- s ≦ 4 のとき，(4, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(4, s)-SATは自明な問題) (Tovey '84)
- s ≧ 6 のとき，(4, s)-SATはNP困難 (Dubois '90)
- s ≧ 5 のとき，(4, s)-SATはNP困難 (Stříbrná '94)
- つまり，f(4) = 4

(5, s)-SATに対する事実

63

- s ≦ 5 のとき，(5, s)-SATのどの入力も充足可能 (つまり，(5, s)-SATは自明な問題) (Tovey '84)
- s ≧ 11 のとき，(5, s)-SATはNP困難 (Dubois '90)
- つまり，5 ≦ f(5) ≦ 10

f(k) の値：k が小さい場合

64

- f(3) = 3 (Tovey '84)
- f(4) = 4 (Tovey '84 , Stříbrná '94)
- 5 ≦ f(5) ≦ 10 (Dubois '90)

f(k) の値：k が小さい場合（現状）

65

- 3 ≦ f(3) ≦ 3
- 4 ≦ f(4) ≦ 4
- 5 ≦ f(5) ≦ 7
- 7 ≦ f(6) ≦ 11
- 13 ≦ f(7) ≦ 17
- 24 ≦ f(8) ≦ 29
- 41 ≦ f(9) ≦ 51

Tovey '84

Stříbrná '94

Berman, Karpinski, Scott '03

Hoory, Szeider '05

f(k) の値：一般の k

66

- k ≦ f(k) (Tovey '84)
- $\lfloor 2^k/ek \rfloor \leqq f(k) \leqq 11 \cdot 2^{k-5}$ (Kratochvíl, Savický, Tuza '93)
- つまり，
  下界：$f(k) = \Omega(2^k/k)$
  上界：$f(k) = O(2^k)$

f(k) の値：一般の k（続）

67

- 下界：$f(k) = \Omega(2^k/k)$
  上界：$f(k) = O(2^k)$ (Kratochvíl, Savický, Tuza '93)
- 上界：$f(k) = O(2^k/k^{0.26})$ (Savický, Sgall '00)
- 上界：$f(k) = O((2^k \log k)/k)$ (Hoory, Szeider '06)
- 上界：$f(k) = O(2^k/k)$ (Gebauer '09)
- $f(k) = \left(\frac{2}{e} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\frac{2^k}{k}$

(Gebauer, Szabó, Tardos '11)

どのように証明するか？：下界

68

復習

任意の k≧3に対して，ある f(k) が存在し次が成立
- s ≦ f(k) のとき，(k, s)-SATのどの入力も充足可能（つまり，(k, s)-SATは自明な問題）
- s ≧ f(k) + 1 のとき，(k, s)-SATはNP困難

(Kratochvíl, Savický, Tuza '93)

- L(k) ≦ f(k) を証明するためには？
  (k, L(k))-SATのどの入力も充足可能であることを証明すればよい

どのように証明するか？：上界

69

復習

任意の k≧3に対して，ある f(k) が存在し次が成立
- s ≦ f(k) のとき，(k, s)-SATのどの入力も充足可能（つまり，(k, s)-SATは自明な問題）
- s ≧ f(k) + 1 のとき，(k, s)-SATはNP困難

(Kratochvíl, Savický, Tuza '93)

- f(k) ≦ U(k) を証明するためには？
  (k, U(k)+1)-SATの入力で充足不可能なものが存在することを証明すればよい

証明のための方法論

70

- 存在証明
  - 下界：(k, L(k))-SATのどの入力に対しても，それを充足する真理値割当が存在することを証明
  - 上界：(k, U(k)+1)-SATの入力で，充足不可能なものが存在することを証明
- 明示的構成（アルゴリズム）
  - 下界：(k, L(k))-SATのどの入力に対しても，それを充足する真理値割当を明示的に構成
  - 上界：(k, U(k)+1)-SATの入力で，充足不可能なものを明示的に構成

下界の証明法について

71

- k ≦ f(k) (Tovey '84)
  - 存在証明：二部グラフの完全マッチング問題に帰着
  - 明示的構成：多項式時間 (Hopcroft, Karp '73)
- $\lfloor 2^k/ek \rfloor$ ≦ f(k) (Kratochvíl, Savický, Tuza '93)
  - 存在証明：Lovászの局所補題を利用
  - 明示的構成：（乱択）多項式時間 (Moser, Tardos '10)

今日の話の流れ

72

- パート1：2と3の違い アラカルト
  - 「2と3の違い」の現象の例をいくつか見ていく
- パート2：充足可能性問題に焦点を絞って
  - 充足可能性問題の難しさが急激に変わる現象を特に詳しく見ていく
- パート3：パラメータ化計算量理論
  - どんな問題も急激に変わる現象を見せるのか？

パラメータ化計算量理論

2と3の違い

74

2	3
2次元の最短路問題	3次元の最短路問題
グラフの2彩色可能性	グラフの3彩色可能性
グラフの2彩色可能性	3-グラフの2彩色可能性
グラフの完全マッチング	3-グラフの完全マッチング
最小2端子カット	最小3端子カット
Tverberg2分割	Tverberg3分割
2充足可能性問題	3充足可能性問題
効率よく解ける	効率よく解けなそう

どんな問題でも2と3は違うのか？

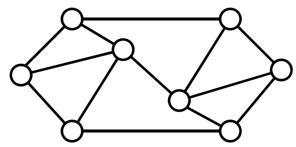
75

- 2と3が違う問題
  - 最小k端子カット
- 2と3が違わない問題
  - 最小kカット
  - シュタイナー木

最小kカット

76

- 無向グラフ
- 全体をk個に分離する辺集合で最小のものは？

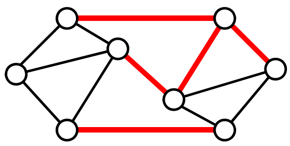


k=3

最小kカット

77

- 無向グラフ
- 全体をk個に分離する辺集合で最小のものは？

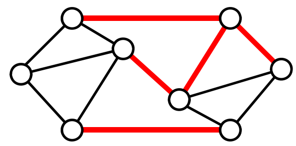


k=3

最小kカット

78

- kが定数である限り
  この問題は効率よく解ける



k=3

最小kカット:アルゴリズム

79

- $O(n^{O(k^2)})$ (Goldschmidt, Hochbaum '94)
- $O(n^{2k}$ polylog(n)) 乱択 (Karger, Stein '96)
- $O(n^{4k}$ poly(n)) (Kamidoi, Yoshida, Nagamochi '06)
- $O(n^{2k}$ polylog(n)) (Thorup '08)

n はグラフの頂点数

最小k端子カット vs 最小kカット

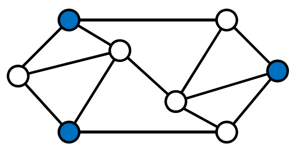
80

k	2	3	4	5	6	・・・
最小k端子カット	易	難	難	難	難	・・・
最小kカット	易	易	易	易	易	・・・

シュタイナー木問題

81

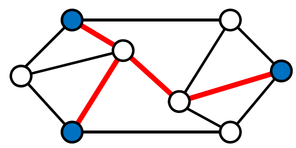
- 無向グラフ, 端子t_1, t_2, ・・・, t_k
- 端子を連結する辺集合で最小のものは？



シュタイナー木問題

82

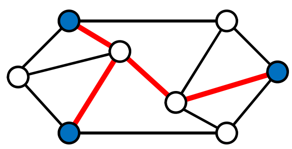
- 無向グラフ, 端子t_1, t_2, ・・・, t_k
- 端子を連結する辺集合で最小のものは？



シュタイナー木問題

83

- 端子数 k が定数であれば,
  この問題は効率よく解ける



シュタイナー木問題:アルゴリズム

84

- $O(3^k n^3)$ (Dreyfus, Wagner '72)
- $O(2.684^k n^{10})$ (Fuchs, Kern, Wang '07)
- $O((2+\varepsilon)^k$ poly(n))
  (Fuchs, Kern, Mölle, Richter, Rossmanith, Wang '07)
- $O(2^k n^3)$
  (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)

n はグラフの頂点数

計算複雑性の比較

85

k	2	3	4	5	6	…
最小k端子カット	易	難	難	難	難	…
最小kカット	易	易	易	易	易	…
シュタイナー木	易	易	易	易	易	…

計算複雑性の比較：再考

86

- 最小kカット
  $O(n^{2k}$ polylog(n)) (Thorup '08)
- シュタイナー木問題
  $O(2^k n^3)$
  (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)

これらは同じように「易」なのか？

計算複雑性の比較

87

k	2	3	4	5	…
最小kカット	$O(n^4)$	$O(n^6)$	$O(n^8)$	$O(n^{10})$	…
シュタイナー木	$O(n^3)$	$O(n^3)$	$O(n^3)$	$O(n^3)$	…

polylog(n) は無視

疑問：
最小kカットに対して，kの増加に伴って
多項式の次数が上がらないアルゴリズムはあるか？

次数の上がらないアルゴリズム？

88

- 最小kカット問題に対して，kの増加に伴って多項式の次数が上がらないアルゴリズムは（おそらく）存在しない
  (Downey, Estivill-Castro, Fellows, Priesto, Rosamond '03)
- おそらく存在しない ＝
  存在すると，他のいろんな問題に対しても存在

おそらく存在しない問題

89

- 3SATで，ちょうどk個の変数を1とする充足真理値割当が存在するか？
- 無向グラフに，頂点数k以上の独立集合が存在するか？
- 言語が，最後のkステップだけ非決定性を持つチューリング機械で受理されるか？

これらは「W[1]困難」な問題と呼ばれている

次数の上がらないアルゴリズム

90

- 固定パラメータ・アルゴリズム：
  kの増加に伴って，多項式の次数が上がらない
- 英語：fixed-parameter algorithm
- Fixed-parameter tractable (FPT) な問題：
  そのようなアルゴリズムを持つ問題

シュタイナー木問題：アルゴリズム

91

- $O(3^k n^3)$ (Dreyfus, Wagner '72)
- $O(2.684^k n^{10})$ (Fuchs, Kern, Wang '07)
- $O((2+\varepsilon)^k \mathrm{poly}(n))$
  (Fuchs, Kern, Mölle, Richter, Rossmanith, Wang '07)
- $O(2^k n^3)$
  (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)

n はグラフの頂点数

これらは固定パラメータ・アルゴリズム

2^k よりもよいアルゴリズム？

92

- シュタイナー木問題
  $O(2^k n^3)$
  (Björklund, Husfeldt, Kaski, Koivisto '07)
- この「2^k」を例えば「1.5^k」に改善できるか？

おそらく存在しない

93

- シュタイナー木問題に対して，kに関する依存性を
  2^k よりも小さくするアルゴリズムは
  （おそらく） 存在しない
  (Cygan, Dell, Lokshtanov, Marx, Nederlof,
  Okamoto, Paturi, Saurabh, Wahlström, '12)
- おそらく存在しない：
  これができてしまうと，
  最小集合被覆問題が 2^n よりも早く解けてしまう

問題の分類

94

kの増加に伴って

- あるkにおいて，問題がNP困難となる
- kが定数のとき，多項式時間で解けるが，
  その多項式の次数は増加する （W[1]困難）
- kが定数のとき，多項式時間で解け，
  その多項式の次数は増加しない （FPT）

どうしてこんな違いがあるのか？

95

- 満足な解答は得られていない・・・
- 現状の計算理論は博物学的な分類を行えるだけ
- このような違いが説明できないことは
  計算理論が十分に発達していないことの証

このあたりの状況に関する教科書

96

R. Niedermeier.
Invitation to Fixed-Parameter Algorithms.
OUP, 2006.

R.G. Downey and M.R. Fellows.
Parameterized Complexity.
Springer, 1999.

F.V. Fomin and D. Kratsch.
Exact Exponential Algorithms.
Springer, 2010.

J. Flum and M. Grohe.
Parameterized Complexity Theory.
Springer, 2006.

どうしてこんな違いがあるのか？

97

- 満足な解答は得られていない・・・
- 現状の計算理論が得意なのは博物学と分類学
  - しかし，それもままならない・・・ (P vs NP問題など)
- このような違いが説明できないことは
  計算理論が十分に発達していないことの証

Complexity Zoo

98

http://qwiki.stanford.edu/index.php/Complexity_Zoo

今日の話の流れ

99

- パート1：2と3の違い アラカルト
  - 「2と3の違い」 の現象の例をいくつか見ていく
- パート2：充足可能性問題に焦点を絞って
  - 充足可能性問題の難しさが急激に変わる現象を
    特に詳しく見ていく
- パート3：パラメータ化計算量理論
  - どんな問題も急激に変わる現象を見せるのか？

今日の話

100

2と3の違い

- 問題の難しさが「2」と「3」で変わるという現象

メッセージ

- 計算理論において「現象」というものがある
  → 現象を説明するための理論が未発達
- 特に，問題の難しさが急激に変わる，という現象
  → パラメータ化計算量理論との関わり

文献表

パート1：最短路問題

102

可視性グラフの構成

- Subir Kumar Ghosh, David M. Mount: An Output-Sensitive Algorithm for Computing Visibility Graphs. SIAM J. Comput. 20(5): 888-910 (1991)

2次元最短路問題に対する現在最速アルゴリズム

- John Hershberger, Subhash Suri: An Optimal Algorithm for Euclidean Shortest Paths in the Plane. SIAM J. Comput. 28(6): 2215-2256 (1999)

3次元最短路問題の難しさ

- John F. Canny, John H. Reif: New Lower Bound Techniques for Robot Motion Planning Problems. FOCS 1987: 49-60

パート1：彩色の難しさ

103

- Richard M. Karp: Reducibility Among Combinatorial Problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations, New York: Plenum,1972, pp. 85-103.
- László Lovász: Coverings and Coloring of Hypergraphs. Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Boca Raton, Florida, 1973, pp. 3-12.

パート1：マッチング

104

- Jack Edmonds: Paths, Trees, and Flowers. Canad. J. Math. 17: 449-467 (1965)
- Richard M. Karp: Reducibility Among Combinatorial Problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations, New York: Plenum,1972, pp. 85-103.

パート1：最小k端子カット

105

- E. A. Dinic: Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in a Network with Power Estimation. Soviet Math. Doklady 11:1277-1280 (1970)
- Jack Edmonds, Richard M. Karp: Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. J. ACM 19(2): 248-264 (1972)
- Elias Dahlhaus, David S. Johnson, Christos H. Papadimitriou, Paul D. Seymour, Mihalis Yannakakis: The Complexity of Multiterminal Cuts. SIAM J. Comput. 23(4): 864-894 (1994)

パート1：Tverberg分割

106

- Gil Kalai: Combinatorics with a Geometric Flavor: Some Examples. In Visions in Mathematics Towards 2000 (GAFA Special Volume), Part II, pp. 742-749, Birkhäuser, Basel, 2001

Tverbergは(d+1)(k-1)+1個の点から成る集合は必ずTverbergk分割を持つことを証明した (dは次元)

- Helge Tverberg: A Generalization of Radon's Theorem. J. London Math. Soc. 41:123-128 (1966)

パート1：充足可能性問題

107

- Melven R. Krom: The Decision Problem for a Class of First-Order Formulas in Which All Disjunctions are Binary. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 13:15-20 (1967)
- Richard M. Karp: Reducibility Among Combinatorial Problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). Complexity of Computer Computations, New York: Plenum,1972, pp. 85-103.

2SATに対する線形時間アルゴリズムは以下の論文

- Bengt Aspvall, Michael F. Plass, Robert Endre Tarjan: A Linear-Time Algorithm for Testing the Truth of Certain Quantified Boolean Formulas. Inf. Process. Lett. 8(3): 121-123 (1979)

パート2：生起回数による細分化

108

- Craig A. Tovey: A Simplified NP-Complete Satisfiability Proof. Discr. Appl. Math. 8(1):85-89 (1984)
- Olivier Dubois: On the *r,s*-SAT Satisfiability Problem and a Conjecture of Tovey. Discr. Appl. Math. 26(1): 51-60 (1990)
- Jan Kratochvíl, Petr Savický, Zsolt Tuza: One More Occurrence of Variables Makes Satisfiability Jump from Trivial to NP-Complete. SIAM J. Comput. 22(1): 203-210 (1993)
- J. Stříbrná: Between Combinatorics and Formal Logic. Master's Thesis, Charles University, Prague, 1994

パート2：f(k) の値 (1)

109

- Piotr Berman, Marek Karpinski, Alex D. Scott: Approximation Hardness and Satisfiability of Bounded Occurrence Instances of SAT. Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC) 10(022): (2003)
- Shlomo Hoory, Stefan Szeider: Computing Unsatisfiable k-SAT Instances with Few Occurrences per Variable. Theor. Comput. Sci. 337(1-3): 347-359 (2005)
- Shlomo Hoory, Stefan Szeider: A Note on Unsatisfiable k-CNF Formulas with Few Occurrences per Variable. SIAM J. Discrete Math. 20(2): 523-528 (2006)

パート2：f(k) の値 (2)

110

- Heidi Gebauer: Disproof of the Neighborhood Conjecture with Implications to SAT. ESA 2009: 764-775
- Heidi Gebauer, Tibor Szabó, Gábor Tardos: The Local Lemma is Tight for SAT. SODA 2011: 664-674
- John E. Hopcroft, Richard M. Karp: An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs. SIAM J. Comput. 2(4): 225-231 (1973)
- Robin A. Moser, Gábor Tardos: A Constructive Proof of the General Lovász Local Lemma. J. ACM 57(2): (2010)

パート3：最小kカット

111

- Olivier Goldschmidt , Dorit S. Hochbaum: A Polynomial Algorithm for the k-Cut Problem for Fixed k. Math. Oper. Res. 19(1):24-37, 1994
- David R. Karger, Clifford Stein: A New Approach to the Minimum Cut Problem. J. ACM 43(4): 601-640 (1996)
- Yoko Kamidoi, Noriyoshi Yoshida, Hiroshi Nagamochi: A Deterministic Algorithm for Finding All Minimum k-Way Cuts. SIAM J. Comput. 36(5): 1329-1341 (2007)
- Mikkel Thorup: Minimum k-Way Cuts via Deterministic Greedy Tree Packing. STOC 2008: 159-166

パート3：シュタイナー木

112

- S. Dreyfus, R. Wagner: The Steiner Problem in Graphs. Networks 1:195-207 (1972)
- Bernhard Fuchs, Walter Kern and Xinhui Wang. Speeding Up the Dreyfus–Wagner Algorithm for Minimum Steiner Trees. Math. Methods Oper. Res. 66(1):117-125 (2007)
- Bernhard Fuchs, Walter Kern, Daniel Mölle, Stefan Richter, Peter Rossmanith, Xinhui Wang: Dynamic Programming for Minimum Steiner Trees. Theory Comput. Syst. 41(3): 493-500 (2007)
- Andreas Björklund, Thore Husfeldt, Petteri Kaski, Mikko Koivisto: Fourier Meets Möbius: Fast Subset Convolution. STOC 2007: 67-74

パート3：パラメータ化問題の難しさ

113

- Rodney G. Downey, Vladimir Estivill-Castro, Michael R. Fellows, Elena Prieto, Frances A. Rosamond: Cutting Up is Hard to Do: the Parameterized Complexity of k-Cut and Related Problems. Electr. Notes Theor. Comput. Sci. 78: 209-222 (2003)
- Marek Cygan, Holger Dell, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Jesper Nederlof, Yoshio Okamoto, Ramamohan Paturi, Saket Saurabh, Magnus Wahlström. On Problems as Hard as CNF-SAT. Proc of 27th IEEE Conference on Computational Complexity (CCC 2012), 2012, pp. 74-84.