数理解析 第 12 回
二部グラフのマッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 15 日

最終更新：2014 年 11 月 27 日　19:21

今日の目標

二部グラフのマッチングに関する重要な 2 つの定理

- Hall の結婚定理：完全マッチング
- Kőnig–Egerváry の定理：最大マッチング

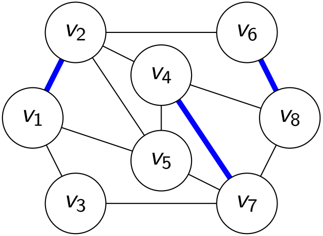
目次

グラフにおけるマッチング

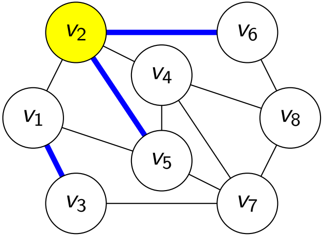
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

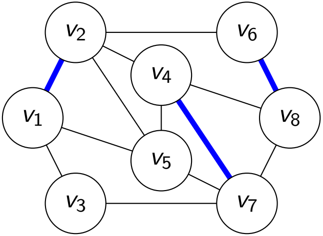
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する

最大マッチング

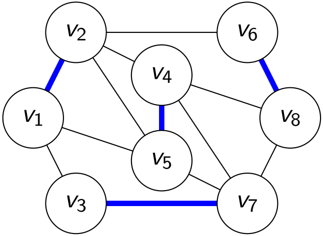
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



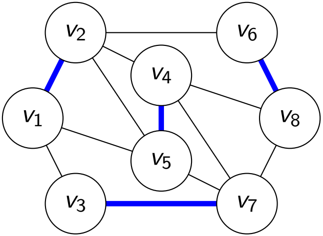
最大マッチングである

完全マッチング

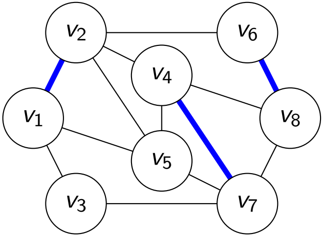
無向グラフ $G=(V,E)$

完全マッチングとは？

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G のすべての頂点が M によって飽和されるもの



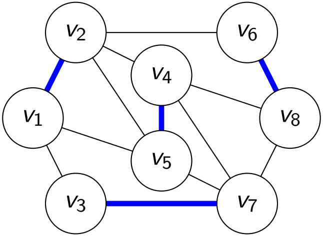
完全マッチングである



完全マッチングではない

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最大性の確認法

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

2 つ紹介する

1. 増加道を用いる方法
2. 頂点被覆を用いる方法

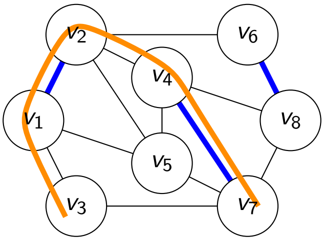
2 つとも重要

交互道

無向グラフ $G=(V,E)$，マッチング $M \subseteq E$

交互道とは？

M に関する**交互道**とは，G における道 $v_1,\ldots,v_k$ で $(k \geq 1)$，
M の辺と $E-M$ の辺が交互に現れるもの



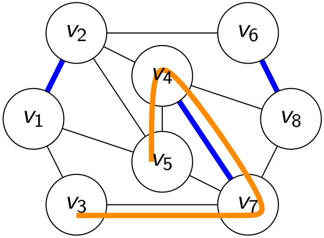
v_3, v_1, v_2, v_4, v_7 は青のマッチングに関する交互道

増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

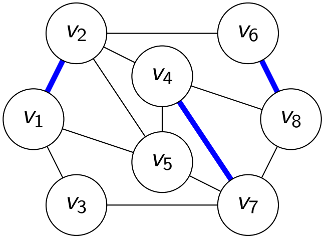
増加道とは？

M に関する**増加道**とは，M に関する交互道 $v_1, \ldots, v_k$ で $(k \geq 1)$，v_1 と v_k が M によって飽和されないもの



v_3, v_7, v_4, v_5 は青のマッチングに関する増加道

増加道に沿ってマッチングを大きくする



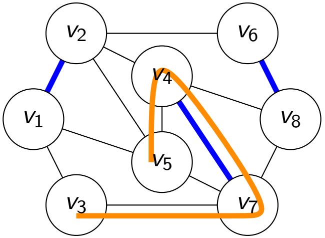
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



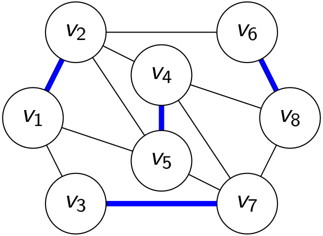
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

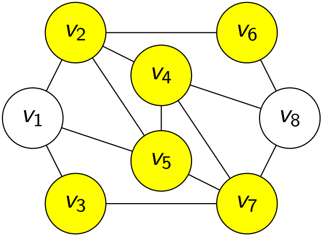
M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

頂点被覆

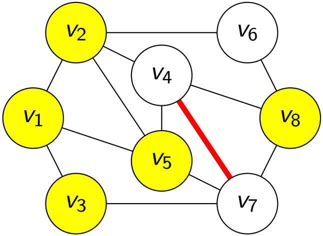
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



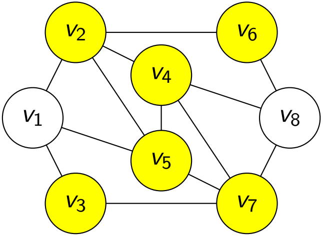
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

最小頂点被覆

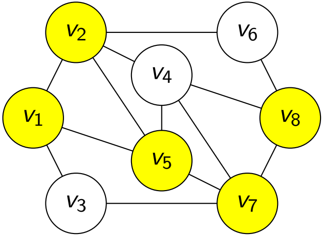
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の**最小頂点被覆**とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で,
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

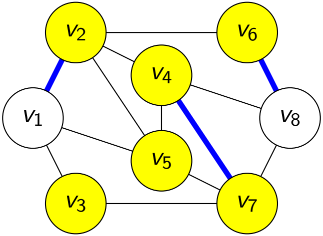
マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

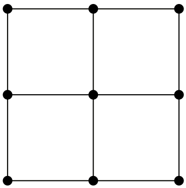
M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例：$|M| = 3$, $|C| = 6$



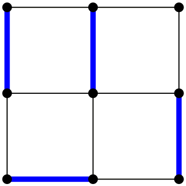
頂点被覆の重要性

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



頂点被覆の重要性

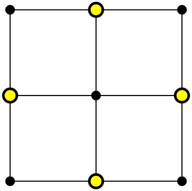
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

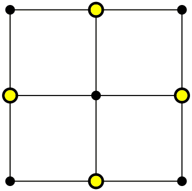
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，
最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数 ≤ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



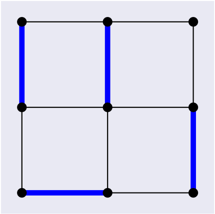
これは頂点被覆なので，
最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数 $\leq$ 4

- したがって，最大マッチングの辺数 $=$ 4 である!!!

頂点被覆の重要性：今一度

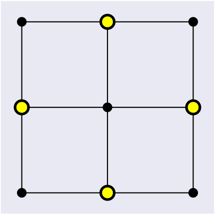
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

頂点被覆を見ることで，マッチングの最大性が保証される

頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

最大マッチングの辺数 $= k$

今日行うこと

- 二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件を証明する (Hall の結婚定理)
- 二部グラフに対しては必ず
  $$\text{最大マッチングの辺数} = \text{最小頂点被覆の頂点数}$$
  となることを証明する (Hall の結婚定理を用いる)
- Hall の結婚定理の他の応用を見る

目次

復習：二部グラフ

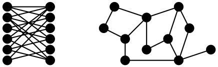
無向グラフ $G = (V, E)$

二部とは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ が存在するとき，G は**二部グラフ**と呼ばれる

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ ならば，$\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



このような A, B を G の**部集合**と呼ぶ

復習：二部グラフ

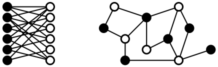
無向グラフ $G = (V, E)$

二部とは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ が存在するとき，G は**二部グラフ**と呼ばれる

- $A \cup B = V$，かつ，$A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ ならば，$\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ かつ $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



このような A, B を G の**部集合**と呼ぶ

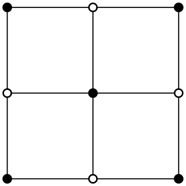
二部グラフと長さ奇数の閉路

無向グラフ $G = (V, E)$

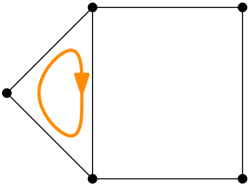
二部グラフの特徴付け (必要十分条件)

G は二部グラフ $\Leftrightarrow$ G は長さ奇数の閉路を部分グラフとして持たない

例



二部グラフである



二部グラフでない

二部グラフと長さ奇数の閉路

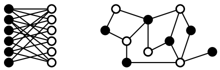
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフの特徴付け (必要十分条件)

G は二部グラフ $\Leftrightarrow$ G は長さ奇数の閉路を部分グラフとして持たない

$\Rightarrow$ の証明：G は二部グラフであると仮定

- A, B を G の部集合とする
- C を G に含まれる任意の閉路とする
- 上の 2 条件より，C の頂点は A と B を交互に訪れる
- よって，C の長さは奇数になれず，偶数である．



二部グラフと長さ奇数の閉路

無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフの特徴付け (必要十分条件)

G は二部グラフ $\Leftrightarrow$ G は長さ奇数の閉路を部分グラフとして持たない

$\Leftarrow$ の証明：G が長さ奇数の閉路を部分グラフとして持たないと仮定

- 頂点を 1 つ選んで，$x \in V$ とする
- 各頂点 $v \in V$ に対して，$d(v)$ で x から v へ至る道の最短長とする
- ここで，$A = \{v \in V \mid d(v)$ が偶数 $\}$，$B = \{v \in V \mid d(v)$ が奇数 $\}$ とする
- このとき，任意の $\{u, v\} \in E$ に対して，$\{u, v\} \cap A = \emptyset$ ($\because$ G が長さ奇数の閉路を含まない)
- 同様に，任意の $\{u, v\} \in E$ に対して，$\{u, v\} \cap B = \emptyset$
- したがって，G は二部グラフ $\square$

目次

近傍

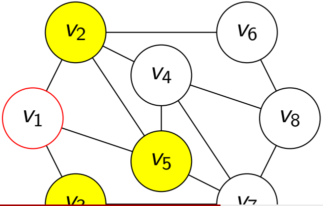
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の**近傍**とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v) \right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

近傍

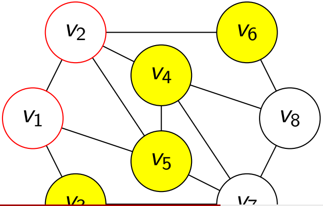
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の**近傍**とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N(v) \right) - S$$



- $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

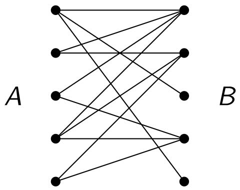
二部グラフの完全マッチング

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件 (Hall の結婚定理)

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

例：



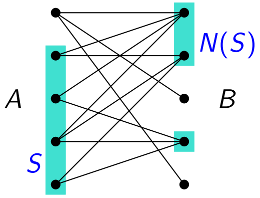
二部グラフの完全マッチング

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

二部グラフが完全マッチングを持つための必要十分条件
(Hall の結婚定理)

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

例：



Hall の結婚定理：証明 (1)

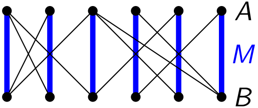
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

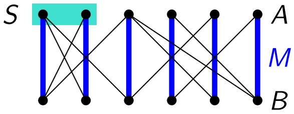
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

<u>$\Rightarrow$ の証明</u>：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

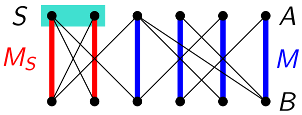
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

<u>$\Rightarrow$ の証明</u>：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (1)

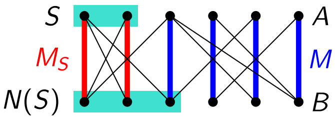
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Rightarrow$ の証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを M とする

- 任意の $S \subseteq A$ を考える
- S を飽和する M の辺を集めた集合を M_S とすると，$|S| = |M_S|$
- M_S が飽和する B の頂点はすべて $N(S)$ の要素
- $\therefore |M_S| \leq |N(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (2)

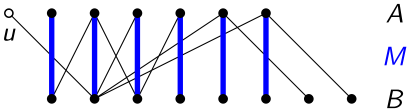
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

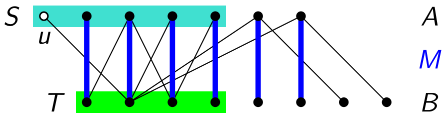
$\Leftarrow$ の証明 (対偶)：そのようなマッチングを持たないとする

- M を G の最大マッチングとする
- 仮定より，M が飽和しない A の頂点が存在．それを $u \in A$ とする
- $\cdots$ ← 今からここを埋める
- したがって，そのような S に対して $|S| > |N(S)|$



Hall の結婚定理：証明 (3)

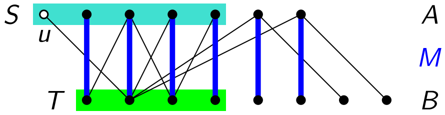
- $S = \{a \in A \mid u$ から始まるある交互道が a で終わる $\}$ とする
- $T = \{b \in B \mid u$ から始まるある交互道が b で終わる $\}$ とする



Hall の結婚定理：証明 (4)

観察 1：$S - \{u\}$ の頂点には M の辺が接続

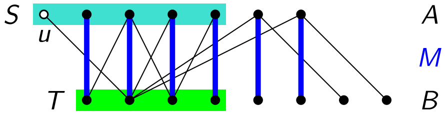
- S の構成法からすぐに分かる



Hall の結婚定理：証明 (5)

観察 2：T の頂点には M の辺が接続

- そうでないとすると増加道が存在し，M の最大性に矛盾

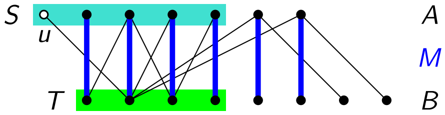


ここまでの結論：$|T| = |S - \{u\}| = |S| - 1 < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (6)

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$

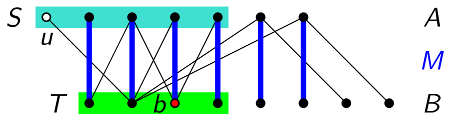


ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (6)

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$

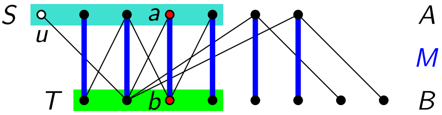


ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (6)

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore$ $b \in T$

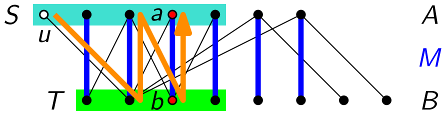


ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (6)

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$

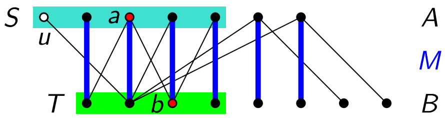


ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (6)

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore b \in T$

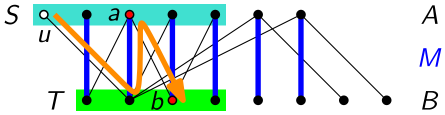


ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (6)

観察 3：$N(S) \subseteq T$

- $b \in N(S)$ とする
- つまり，ある $a \in S$ が存在して $\{a, b\} \in E$
- $\{a, b\} \in M$ ならば，u から b を経由して a に至る交互道が存在
- $\{a, b\} \in E - M$ ならば，u から a を経由して b に至る交互道が存在
- $\therefore$ いずれにしても u から b へ至る交互道が存在
- $\therefore$ $b \in T$



ここまでの結論：$|N(S)| \leq |T| < |S|$

Hall の結婚定理：証明 (7)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N(S)|$

$\Leftarrow$ の証明 (対偶)：そのようなマッチングを持たないとする

- M を G の最大マッチングとする
- 仮定より，M が飽和しない A の頂点が存在．それを $u \in A$ とする
- $S = \{a \in A \mid u$ から始まるある交互道が a で終わる $\}$ とする
- $T = \{b \in B \mid u$ から始まるある交互道が b で終わる $\}$ とする
- T の頂点と $S - \{u\}$ の頂点には M の辺が接続 (観察 1 と 2)
- また，$N(S) \subseteq T$ (観察 3)
- したがって，そのような S に対して $|S| > |S| - 1 = |T| \geq |N(S)|$ □

目次

二部グラフの最大マッチング

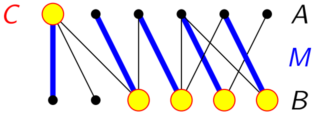
二部グラフ $G = (V, E)$

二部グラフにおけるマッチングと頂点被覆の関係 (Kőnig–Egerváry の定理)

G のあるマッチング M，ある頂点被覆 C が存在して

$$|M| = |C|$$

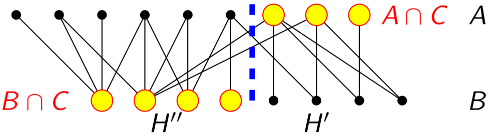
例：$|M| = |C| = 5$



König–Egerváry：証明 (1)

G の部集合を A, B とする

- C を G の最小頂点被覆とする
- 目標：C を使って G のマッチング M で辺数 $|C|$ のものを構成する
- H' を $(A \cap C) \cup (B - C)$ が誘導する G の部分グラフとする
- H'' を $(A - C) \cup (B \cap C)$ が誘導する G の部分グラフとする



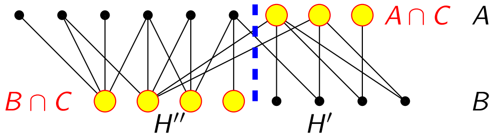
König–Egerváry：証明 (2)

観察 1：H' は $A \cap C$ を飽和するマッチングを持つ

- Hall の結婚定理を使う
- 任意の $S \subseteq A \cap C$ を考える
- $(C - S) \cup N(S)$ も G の頂点被覆 ($\leftarrow$ $N(S)$ は H' における S の近傍)
- C は最小頂点被覆なので，

$$|C| \leq |(C - S) \cup N(S)| \leq |C| - |S| + |N(S)|$$

- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



このマッチングを M' とする．(注：$|M'| = |A \cap C|$)

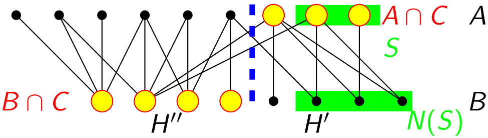
Kőnig–Egerváry：証明 (2)

観察 1：H' は $A \cap C$ を飽和するマッチングを持つ

- Hall の結婚定理を使う
- 任意の $S \subseteq A \cap C$ を考える
- $(C - S) \cup N(S)$ も G の頂点被覆 ($\leftarrow$ $N(S)$ は H' における S の近傍)
- C は最小頂点被覆なので，

$$|C| \leq |(C - S) \cup N(S)| \leq |C| - |S| + |N(S)|$$

- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



このマッチングを M' とする．(注：$|M'| = |A \cap C|$)

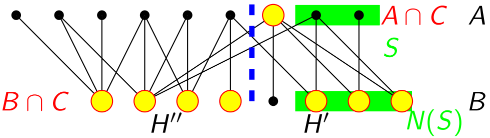
Kőnig–Egerváry：証明 (2)

観察 1：H' は $A \cap C$ を飽和するマッチングを持つ

- Hall の結婚定理を使う
- 任意の $S \subseteq A \cap C$ を考える
- $(C - S) \cup N(S)$ も G の頂点被覆 (← $N(S)$ は H' における S の近傍)
- C は最小頂点被覆なので,

$$|C| \leq |(C - S) \cup N(S)| \leq |C| - |S| + |N(S)|$$

- $\therefore |S| \leq |N(S)|$



このマッチングを M' とする．(注：$|M'| = |A \cap C|$)

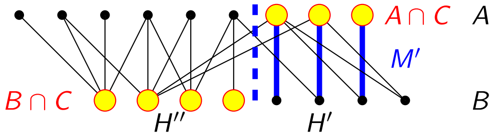
König–Egerváry：証明 (2)

観察 1：H' は $A \cap C$ を飽和するマッチングを持つ

- Hall の結婚定理を使う
- 任意の $S \subseteq A \cap C$ を考える
- $(C - S) \cup N(S)$ も G の頂点被覆 ($\leftarrow$ $N(S)$ は H' における S の近傍)
- C は最小頂点被覆なので，

$$|C| \leq |(C - S) \cup N(S)| \leq |C| - |S| + |N(S)|$$

- $\therefore |S| \leq |N(S)|$

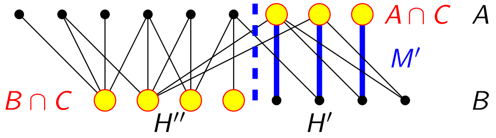


このマッチングを M' とする．(注：$|M'| = |A \cap C|$)

König–Egerváry：証明 (3)

観察 2：H'' は $B \cap C$ を飽和するマッチングを持つ

- 証明は観察 1 と同じ

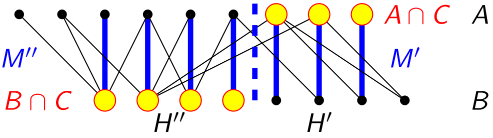


このマッチングを M'' とする．(注：$|M''| = |B \cap C|$)

König–Egerváry：証明 (3)

観察 2：H'' は $B \cap C$ を飽和するマッチングを持つ

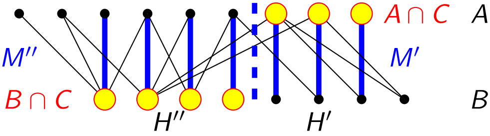
- 証明は観察 1 と同じ



このマッチングを M'' とする．(注：$|M''| = |B \cap C|$)

Kőnig–Egerváry：証明 (4)

- このとき，$M' \cup M''$ は G のマッチング
- そして，$|M' \cup M''| = |M'| + |M''| = |A \cap C| + |B \cap C| = |C|$
- すなわち，要素数 $|C|$ のマッチングが構成できた $\square$



頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，
  最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

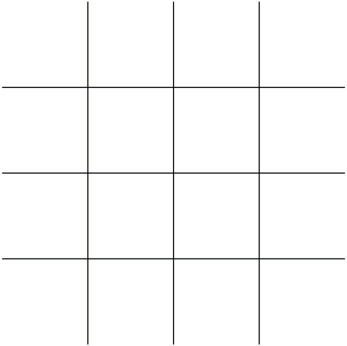
最大マッチングの辺数 $= k$

Kőnig–Egerváry の定理の帰結

二部グラフに対しては「この 2 つができれば」が必ず可能である

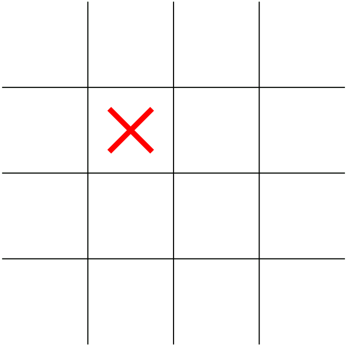
目次

四目並べ



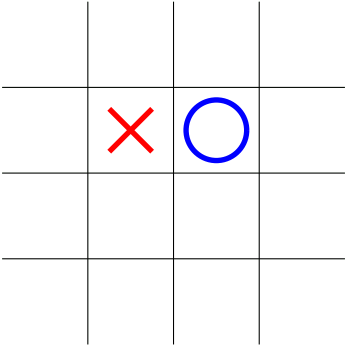
「斜め」は考えないとする

四目並べ



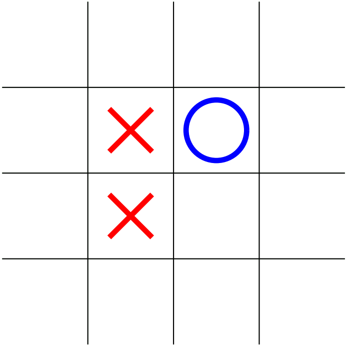
「斜め」は考えないとする

四目並べ



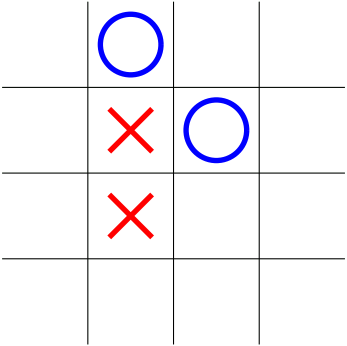
「斜め」は考えないとする

四目並べ



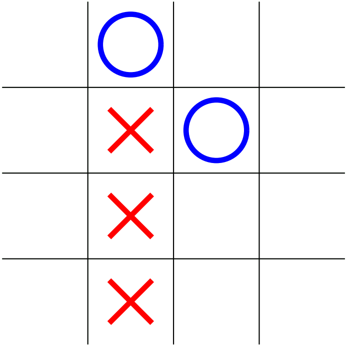
「斜め」は考えないとする

四目並べ



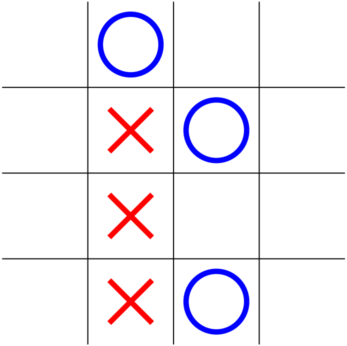
「斜め」は考えないとする

四目並べ



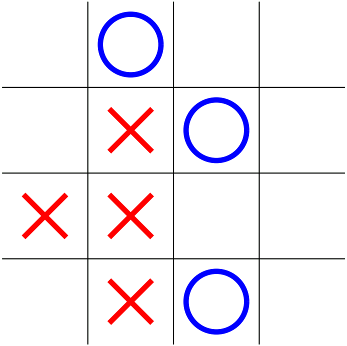
「斜め」は考えないとする

四目並べ



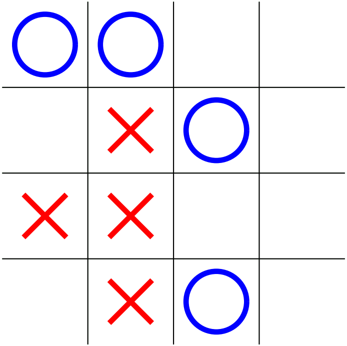
「斜め」は考えないとする

四目並べ



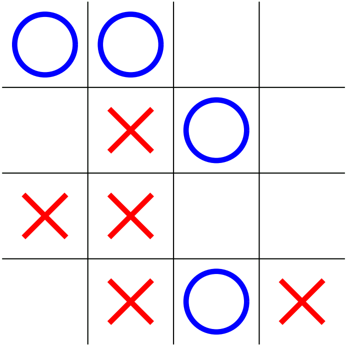
「斜め」は考えないとする

四目並べ



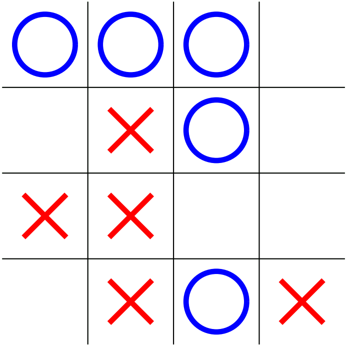
「斜め」は考えないとする

四目並べ



「斜め」は考えないとする

四目並べ



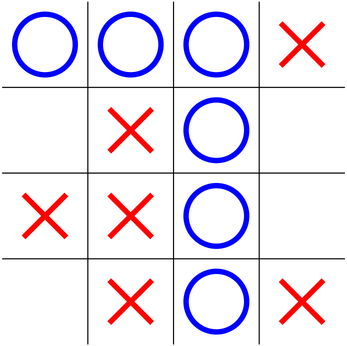
「斜め」は考えないとする

四目並べ

○	○	○	×
	×	○	
×	×		
	×	○	×

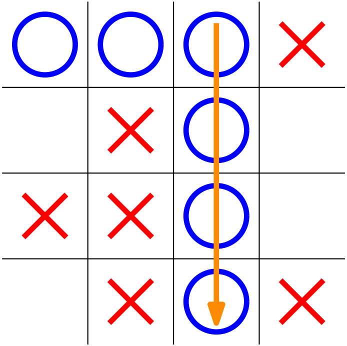
「斜め」は考えないとする

四目並べ



「斜め」は考えないとする

四目並べ

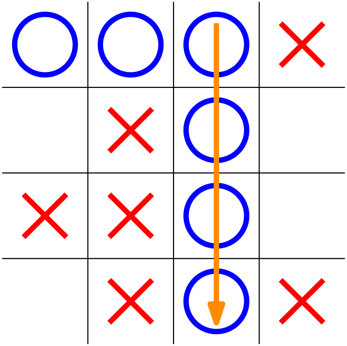


「斜め」は考えないとする

四目並べは引き分けで終わる

四目並べの必勝戦略

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)



証明：Hall の結婚定理を使う

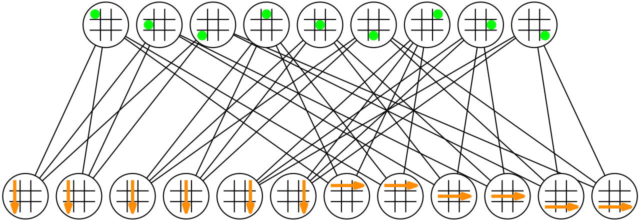
四目並べは引き分けで終わる：二部グラフ G の構成

2 種類の頂点

- マス頂点：盤面の各マスに対応
- 列頂点：盤面の各列 (横と縦) に対応，各列に対して 2 つずつ

マス頂点と列頂点の間に辺を引くのは

- 対応するマスが対応する列に含まれるとき

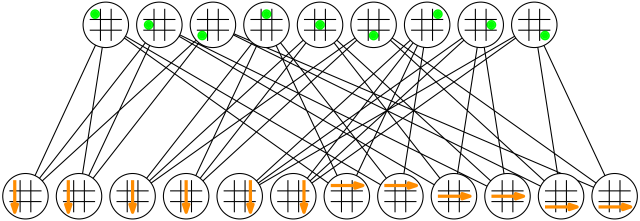


三目並べのときの例

四目並べは引き分けで終わる：二部グラフ G の性質

2 種類の頂点

- マス頂点の次数 $= 4$ ($\because$ 各マスは 2 つの列に含まれるから)
- 列頂点の次数 $= 4$ ($\because$ 各列はマスを 4 つ含むから)



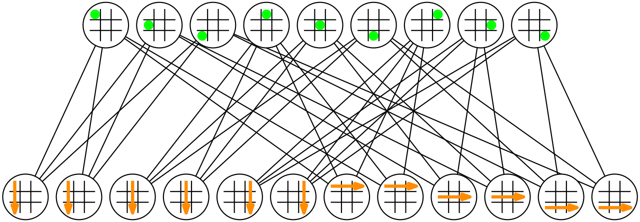
三目並べのときの例

四目並べは引き分けで終わる：Hall の定理の適用 (1)

まず示すこと

このグラフ G には，列頂点をすべて飽和するマッチングが存在する

Hall の定理を使って証明する

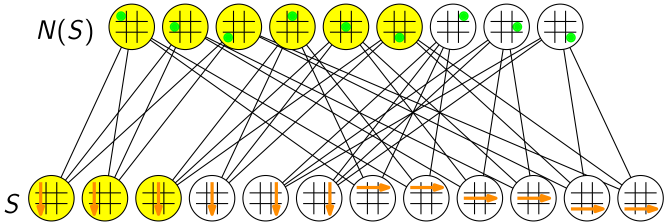


三目並べのときの例

四目並べは引き分けで終わる：Hall の定理の適用 (2)

列頂点を任意にいくつか選んで，S という頂点集合を作る

- 示したいこと：$|S| \leq |N(S)|$
- S と $N(S)$ の間の隣接関係で，数え上げを行う



三目並べのときの例

四目並べは引き分けで終わる：Hall の定理の適用 (3)

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & \multicolumn{5}{c}{N(S)} & \\
 & & v_1 & v_2 & & & v_h & \\
\hline
 & u_1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & = 4 \\
S & u_2 & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & u_k & 1 & 1 & 1 & 1 & & = 4 \\
\hline
 & & \le 4 & \le 4 & \le 4 & \le 4 & \le 4 &
\end{array}
$$

$u \in S$ と $v \in N(S)$ が隣接するなら「1」
そうでないときは「0」

- 各 $u \in S$ に対応する行の成分和 $= \deg_G(u) = 4$
- 各 $v \in N(S)$ に対応する列の成分和 $\le \deg_G(v) = 4$

- $\therefore\ 4|S| =$ この行列の成分和 $\le 4|N(S)|$
- $\therefore\ |S| \le |N(S)|$

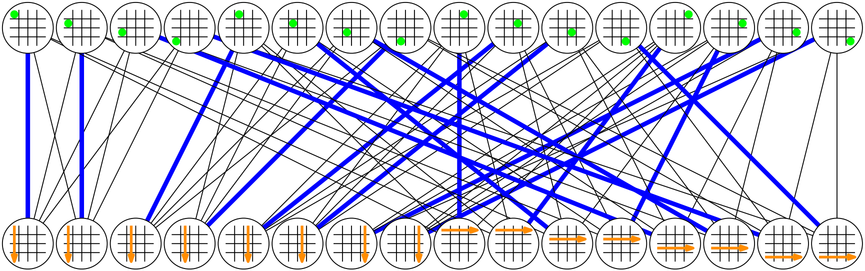
四目並べは引き分けで終わる：Hall の定理の適用 (4)

今示したこと

このグラフ G には，列頂点をすべて飽和するマッチングが存在する

そのようなマッチング M を考える

- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている



四目並べのときの例

四目並べは引き分けで終わる：ペアの作成

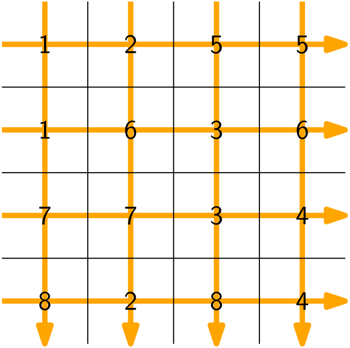
- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている
- その 2 つのマスに同じ記号を書いておく

1	2	5	5
1	6	3	6
7	7	3	4
8	2	8	4

四目並べは引き分けで終わる：ペアを用いた戦略

後手の戦略

- 先手の取ったマスに書かれた記号と同じ記号のマスを取る
- 各列には同じ記号が必ず 2 つあるので，先手は勝てない □



目次

今日のまとめ

今日やったこと

二部グラフのマッチングに関する重要な 2 つの定理

- Hall の結婚定理：完全マッチング
- Kőnig–Egerváry の定理：最大マッチング

目次