数理解析 第 11 回
マッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 8 日

最終更新： 2013 年 1 月 8 日　16:46

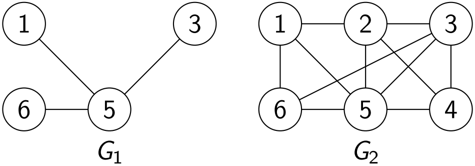
復習：部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

部分グラフとは？

G_1 が G_2 の**部分グラフ**であるとは，次を満たすこと

- $V_1 \subseteq V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$

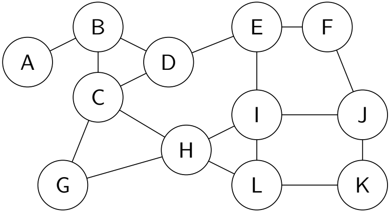


無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

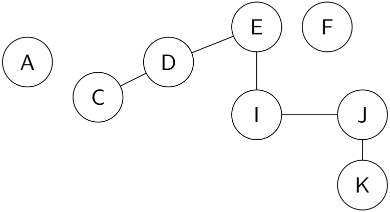
誘導部分グラフとは？

G において U が誘導する部分グラフとは，次で定義されるグラフ

- **頂点集合は U**
- **辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$**



G



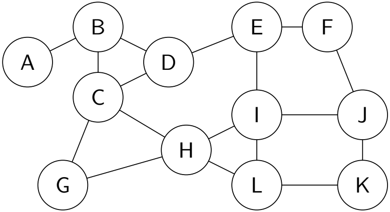
G の誘導部分グラフではない

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

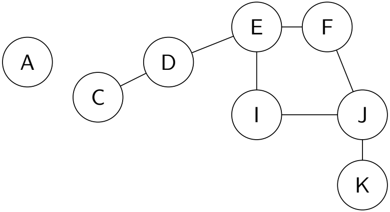
誘導部分グラフとは？

G において U が**誘導する部分グラフ**とは，次で定義されるグラフ

- 頂点集合は U
- 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



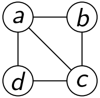
G



G の誘導部分グラフである

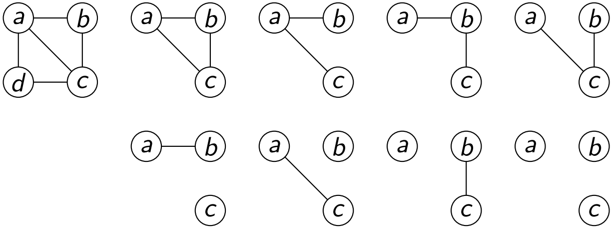
部分グラフと誘導部分グラフ (1)

このグラフの部分グラフを考える



部分グラフはたくさんある

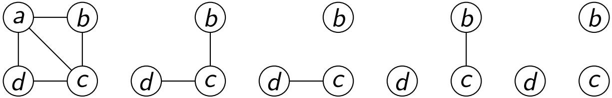
頂点集合を $\{a, b, c\}$ とする部分グラフは 8 個



この中で誘導部分グラフは 1 つだけ

部分グラフと誘導部分グラフ (3)

頂点集合を $\{b, c, d\}$ とする部分グラフは 4 個



この中で誘導部分グラフは 1 つだけ

目次

概要

今日の目標

「マッチング」を理解する

- マッチングの定義を理解する
- 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

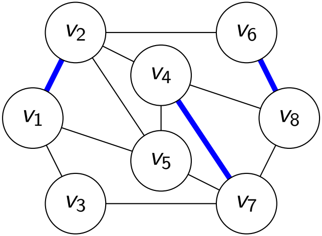
- 最適性の保証 $\rightsquigarrow$ **最適化の基礎**

グラフにおけるマッチング

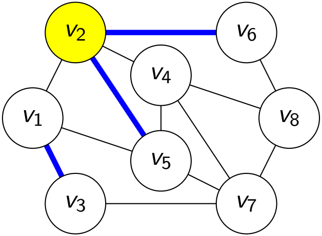
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングとは？

G **のマッチングとは辺部分集合** $M \subseteq E$ **で，**
M **のどの** 2 **辺も同じ頂点に接続しないもの**

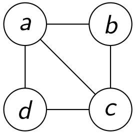


$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ **は**
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ **は**
マッチングではない

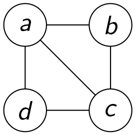
グラフにおけるすべてのマッチング



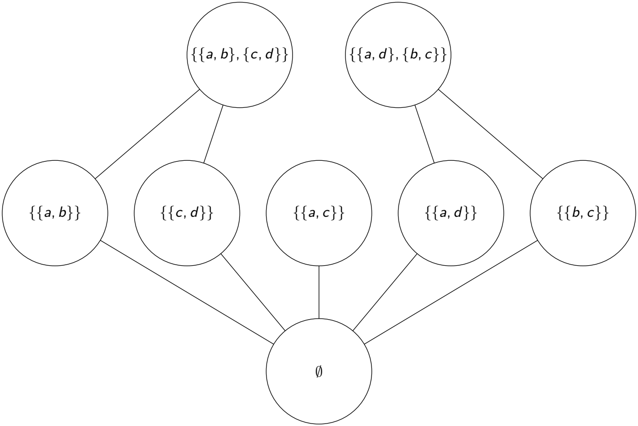
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

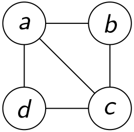
グラフにおけるすべてのマッチング：ハッセ図 (1)



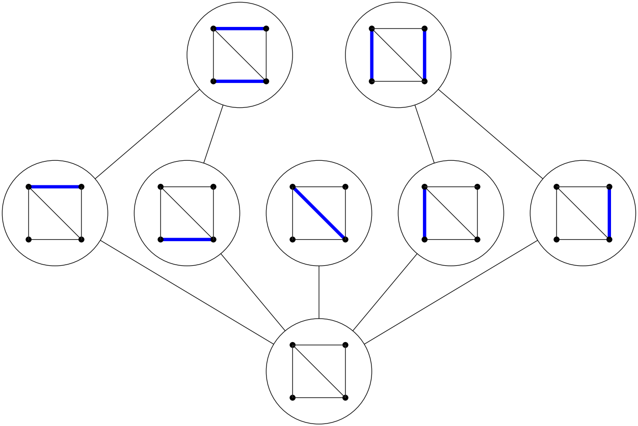
このグラフのすべてのマッチングを包含関係に関してハッセ図にしたものが下の図



グラフにおけるすべてのマッチング：ハッセ図 (2)



**このグラフのすべてのマッチングを
包含関係に関してハッセ図にしたものが
下の図**

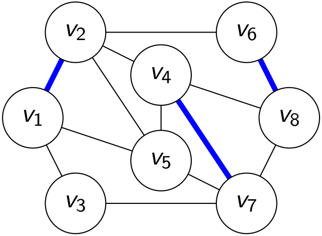


最大マッチング

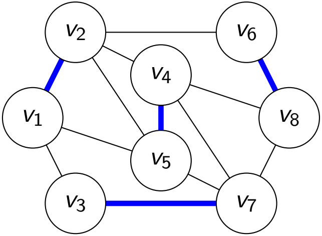
無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングとは？

G の**最大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの

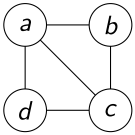


最大マッチングではない

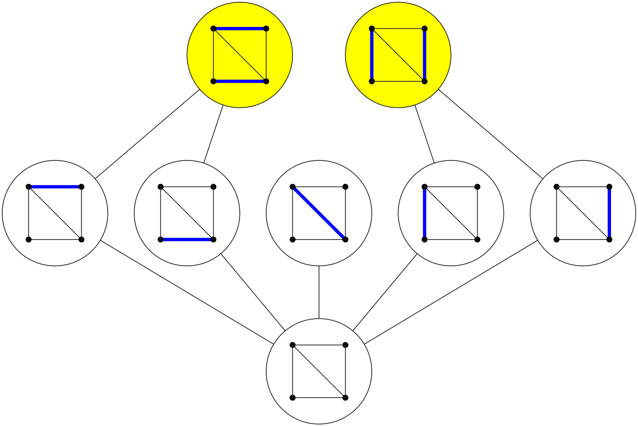


最大マッチングである

最大マッチング：ハッセ図において



黄色のマッチングが最大マッチング

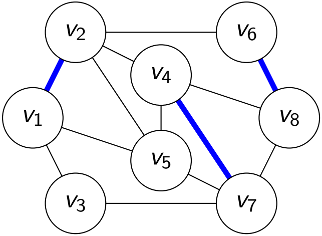


極大マッチング

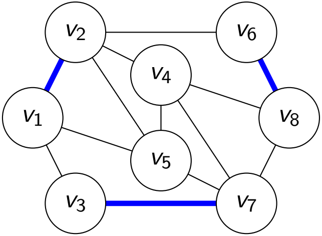
無向グラフ $G = (V, E)$

極大マッチングとは？

G の**極大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
任意の辺 $e \in E - M$ に対して $M \cup \{e\}$ が G のマッチングではないもの

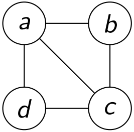


極大マッチングである

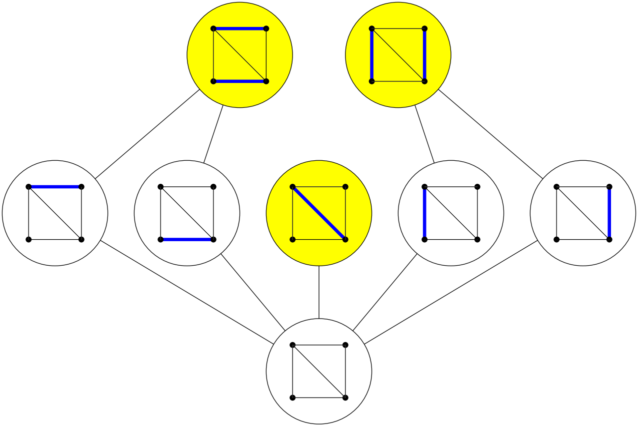


極大マッチングではない

極大マッチング：ハッセ図において



黄色のマッチングが極大マッチング

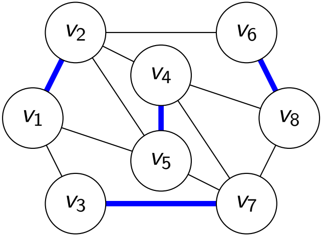


完全マッチング

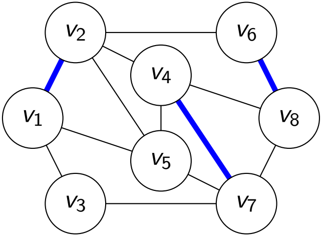
無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングとは？

G **の完全マッチングとは** G **のマッチング** $M \subseteq E$ **で，**
G **の任意の頂点に** M **のある辺が接続しているもの**



完全マッチングである



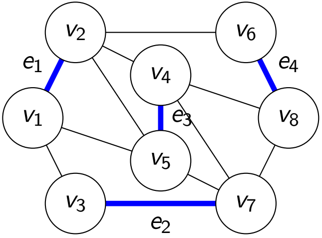
完全マッチングではない

完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

完全マッチングの辺数は？

$M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |M| = |V|/2$



証明 (数え上げ論法による)：

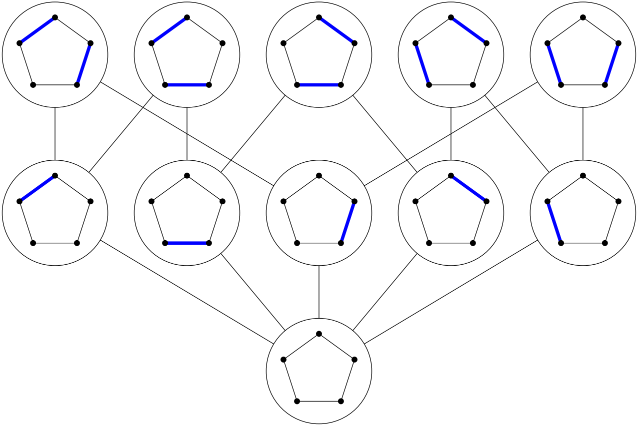
- 各 $v \in V$ に接続する M の辺の数 $= 1$
- 各 $e \in M$ に接続する V の頂点数 $= 2$
- $\therefore |V| = \sum_{v \in V} 1 = \sum_{e \in M} 2 = 2|M|$ $\square$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
e_1	1	1						
e_2			1				1	
e_3				1	1			
e_4						1		1

完全マッチングと最大マッチングの関係

- 完全マッチングを持たないグラフもある
  - 例えば，頂点数が奇数のグラフ
  - 例えば，頂点数が奇数の連結成分を持つグラフ
  - 頂点数が偶数である連結グラフでもそのようなものがある (演習問題)
- 完全マッチングを持つグラフにおいて，
  完全マッチングは最大マッチングである (演習問題)

完全マッチングを持たないグラフと最大マッチング



最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

証明 (背理法による)：M を G の最大マッチングとする

- M が G の極大マッチングではないと仮定する
-
-
- これは　　　　　　　　　　　　　　矛盾 □

標語的なまとめ

完全マッチング $\Rightarrow$ 最大マッチング $\Rightarrow$ 極大マッチング

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

証明 (背理法による)：M を G の最大マッチングとする

- M が G の極大マッチングではないと仮定する
- 極大マッチングの定義より，
  ある $e \in E - M$ が存在して，$M \cup \{e\}$ は G のマッチング
-
- これは 矛盾 □

標語的なまとめ

完全マッチング $\Rightarrow$ 最大マッチング $\Rightarrow$ 極大マッチング

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

証明 (背理法による)：M を G の最大マッチングとする

- M が G の極大マッチングではないと仮定する
- 極大マッチングの定義より，
  ある $e \in E - M$ が存在して，$M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- これは 矛盾 $\square$

標語的なまとめ

完全マッチング $\Rightarrow$ 最大マッチング $\Rightarrow$ 極大マッチング

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

証明 (背理法による)：M を G の最大マッチングとする

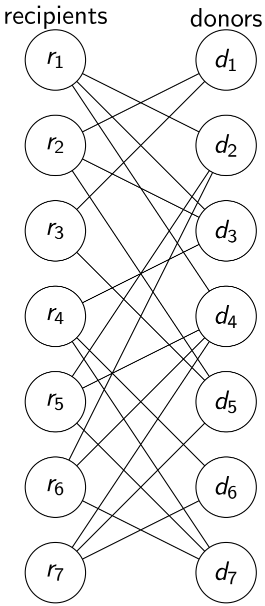
- M が G の極大マッチングではないと仮定する
- 極大マッチングの定義より，
  ある $e \in E - M$ が存在して，$M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- これは M が最大マッチングであることに矛盾 □

標語的なまとめ

完全マッチング $\Rightarrow$ 最大マッチング $\Rightarrow$ 極大マッチング

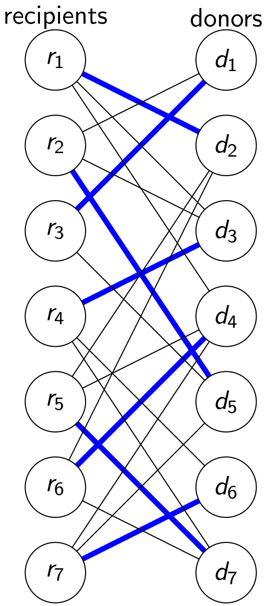
マッチングの応用例：腎交換 (kidney exchange)

- 腎臓病患者は腎臓を望んでいる
- 近親者や配偶者が腎臓を提供することが多い
- しかし，不適合により不可能であることもある
- そのとき，患者 (recipient) と提供者 (donor) をペアとして登録
- 登録されたペア全体の中で適合・不適合の確認
- $\rightsquigarrow$ グラフの構成
- マッチング：可能な腎臓提供



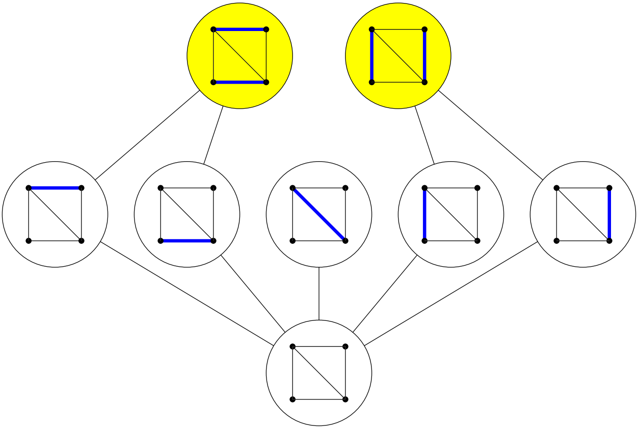
マッチングの応用例：腎交換 (kidney exchange)

- 腎臓病患者は腎臓を望んでいる
- 近親者や配偶者が腎臓を提供することが多い
- しかし，不適合により不可能であることもある
- そのとき，患者 (recipient) と提供者 (donor) をペアとして登録
- 登録されたペア全体の中で適合・不適合の確認
- $\rightsquigarrow$ グラフの構成
- マッチング：可能な腎臓提供



目次

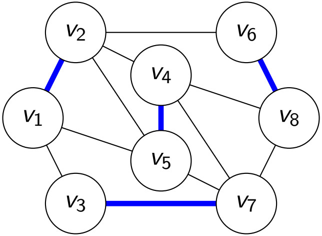
最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

最大性の確認法

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

2 つ紹介する

1. **増加道**を用いる方法
2. **頂点被覆**を用いる方法

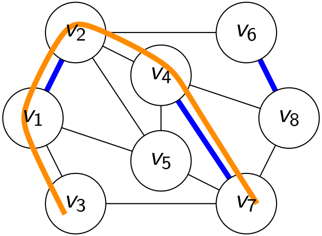
2 つとも重要

交互道

無向グラフ $G = (V, E)$**，マッチング** $M \subseteq E$

交互道とは？

M **に関する交互道とは，**G **における道** $v_1, \ldots, v_k$ **で** $(k \geq 1)$ **，**
M **の辺と** $E - M$ **の辺が交互に現れるもの**



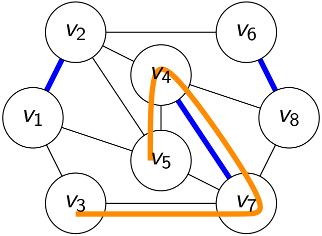
v_3, v_1, v_2, v_4, v_7 **は青のマッチングに関する交互道**

増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

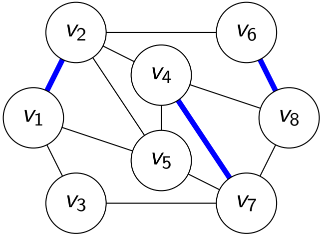
増加道とは？

M に関する**増加道**とは，M に関する交互道 $v_1, \ldots, v_k$ で $(k \geq 1)$，v_1 と v_k が M の辺と接続しないもの



v_3, v_7, v_4, v_5 は青のマッチングに関する増加道

増加道に沿ってマッチングを大きくする



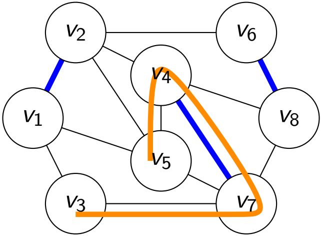
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



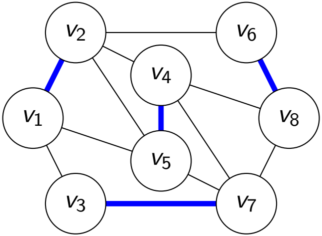
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

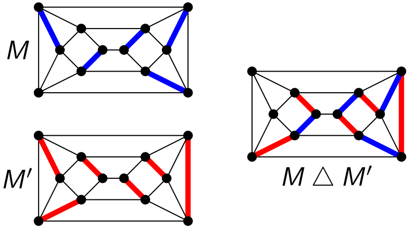
「$\Rightarrow$」の証明：演習問題 (前ページのスライドがヒント)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- …… $\leftarrow$ ここを今から埋めていく
- $\therefore$ M に関する増加道が存在する $\square$

最大マッチングと増加道：証明 (続き 1)

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



集合の対称差とは？

$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$

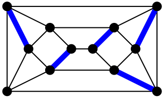
格言

対称差で 2 つの集合の違いが見える

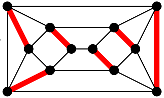
最大マッチングと増加道：証明 (続き 2)

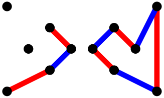
M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える

M



M'





$M \triangle M'$

グラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は道であるか，長さ偶数の閉路である

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の中の状況を考える

- 長さ偶数の閉路において，M の辺の数 $=$ M' の辺の数
- $|M'| > |M|$ なので，
  ある道において，M の辺の数 $<$ M' の辺の数

この道は M に関する増加道!!!

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- $\therefore P$ は G において M に関する増加道である $\square$

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える

- $\therefore$ P は G において M に関する増加道である $\square$

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
  - 各頂点の次数は 2 以下であり，M の辺と M' の辺が交互に現れる
  - $\therefore$ 各連結成分は道であるか，長さ偶数の閉路である
- $\therefore$ P は G において M に関する増加道である $\square$

最大マッチングと増加道：証明 (完成)

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
  - 各頂点の次数は 2 以下であり，M の辺と M' の辺が交互に現れる
  - $\therefore$ 各連結成分は道であるか，長さ偶数の閉路である
  - 長さ偶数の閉路において，M の辺の数 $=$ M' の辺の数
  - $|M'| > |M|$ なので，ある道 P において M の辺の数 $<$ M' の辺の数
  - P の端点は M の辺に接続していない
- $\therefore$ P は G において M に関する増加道である $\square$

増加道の重要性：アルゴリズム

増加道で「山登り」ができる

増加道に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- **入力：無向グラフ** $G = (V, E)$
- **出力：**G **の最大マッチング** M

1. $M := \emptyset$ **とする**
2. while M **に関する増加道** P **が存在する** do
   1. P **に沿って** M **を大きくする**
3. M **を出力**

先ほどの定理 (Berge) **によって，**
このアルゴリズムは必ず停止し，最大マッチングを出力することが分かる

格言

アルゴリズムは数学的構造が導く

目次

最大性の確認法 (再掲)

格言 (再掲)

ある性質を持つものを発見する方法を考えるときには
その性質を持つことを確認する方法をまず考える

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

最大性の確認法

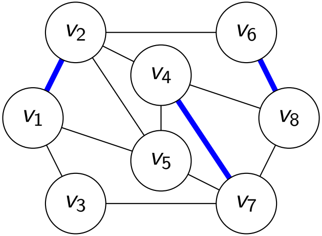
2 つ紹介する

1. **増加道**を用いる方法
2. **頂点被覆**を用いる方法

2 つとも重要

非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングでないことを確認するには
どうしたらよいか？



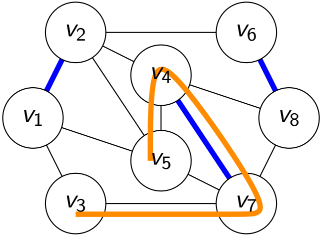
増加道を見つければよい

別の言い方

1 つの増加道がマッチングの非最大性に対する証拠になっている

非最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングでないことを確認するにはどうしたらよいか？



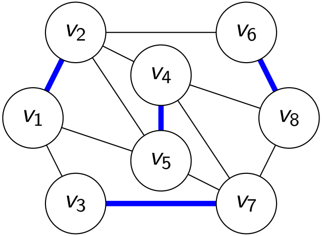
増加道を見つければよい

別の言い方

1 つの増加道がマッチングの非最大性に対する証拠になっている

最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



増加道がないことを言えばよいが，どのようにして言えばよいのか？

別の言い方

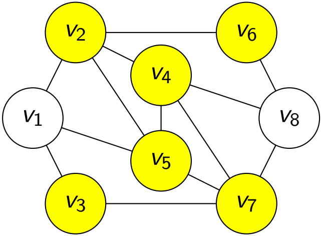
マッチングの最大性に対する証拠はあるのか？

頂点被覆

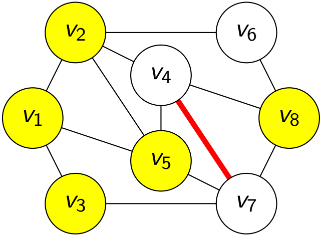
無向グラフ $G = (V, E)$

頂点被覆とは？

G の**頂点被覆**とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



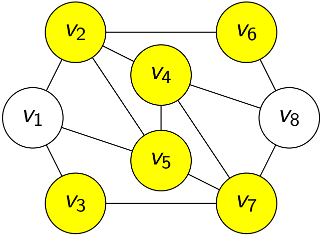
$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

最小頂点被覆

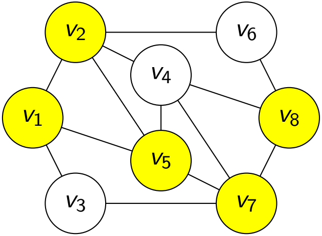
無向グラフ $G = (V, E)$

最小頂点被覆とは？

G の**最小頂点被覆**とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

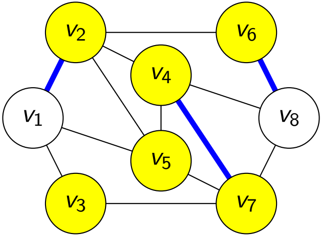
マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

M **が** G **のマッチング**
C **が** G **の頂点被覆** $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例： $|M| = 3, \ |C| = 6$



マッチングと頂点被覆の関係：証明

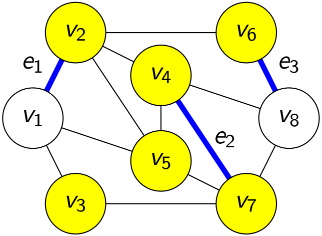
無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

M **が** G **のマッチング**
C **が** G **の頂点被覆** $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明 **(数え上げ論法)：**

- C **の各頂点に接続する** M **の辺の数** ≤ 1
- M **の各辺に接続する** C **の頂点の数** ≥ 1
- $\therefore |M| \leq |C|$ $\square$



$$\begin{array}{c|cccccc|} & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \hline e_1 & 1 & & & & & \\ e_2 & & & 1 & & & 1 \\ e_3 & & & & & 1 & \\ \hline \end{array}$$

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと頂点被覆の関係

M が G の**最大**マッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

マッチングと頂点被覆の関係

M が G のマッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと頂点被覆の関係

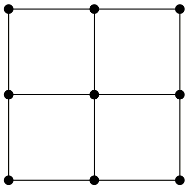
M が G の最大マッチング
C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

M が G の最大マッチング
C が G の最小頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

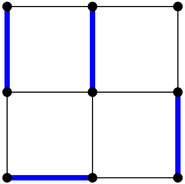
頂点被覆の重要性

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



頂点被覆の重要性

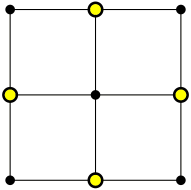
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

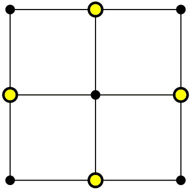
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので，
最大マッチングの辺数 $\leq$ **最小頂点被覆の頂点数** ≤ 4

頂点被覆の重要性 (続き)

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



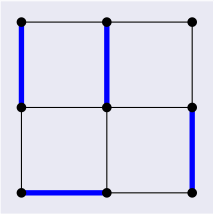
これは頂点被覆なので，
最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数 ≤ 4

- したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$ である!!!

頂点被覆の重要性：今一度

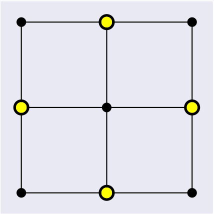
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって，最大マッチングの辺数 $= 4$

格言

頂点被覆を見ることで，マッチングの最大性が**保証**される

頂点被覆の重要性：まとめ

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

- このとき，最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

- このとき，最大マッチングの辺数 $\leq k$

よって，この 2 つができれば

最大マッチングの辺数 $= k$

頂点被覆の重要性：アルゴリズム

頂点被覆により，最適値の「挟み打ち」ができる

頂点被覆に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- **入力：無向グラフ** $G = (V, E)$
- **出力：**G **の最大マッチング** M **と最小頂点被覆** C

1. $M := \emptyset$，$C := \emptyset$ **とする**
2. while $|M| < |C|$ do
   1. M **を大きくするか，**C **を小さくする**
3. M **と** C **を出力**

先ほどの考察より，このアルゴリズムが停止するならば，必ず最大マッチングと最小頂点被覆を出力することが分かる

問題点

停止しないかもしれない

次回行うこと

- 二部グラフに対しては，必ずこのアルゴリズムが停止する
- 言い換えると，二部グラフに対しては

$$\text{最大マッチングの辺数} = \text{最小頂点被覆の頂点数}$$

- この流れは**最適化法の真髄**

目次

今日のまとめ

今日の目標

「マッチング」を理解する

- マッチングの定義を理解する
- 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

- 最適性の保証 $\rightsquigarrow$ 最適化の基礎

目次