

数理解析 第 10 回
木

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 12 月 11 日

最終更新 : 2012 年 12 月 11 日 16:16

目次

- ① グラフの連結性と連結成分
- ② 木
- ③ グラフの全域木
- ④ 今日のまとめ

概要

今日の目標

「木」を理解する

- ▶ 木の定義を理解する
- ▶ 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる
- ▶ グラフの全域木を理解する

証明技法

- ▶ 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

グラフにおける歩道

無向グラフ $G = (V, E)$, G の頂点 $u, v \in V$

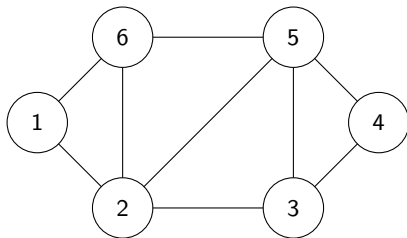
u から v へ至る歩道とは？

G の頂点の列 v_0, v_1, \dots, v_k で次を満たすもの

- ▶ $v_0 = u$ かつ $v_k = v$
- ▶ 任意の $i \in \{0, \dots, k-1\}$ に対して, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

歩道における辺数 k をその歩道の長さと呼ぶ

例 : 「1, 2, 3, 5, 2, 6」は歩道であるが、「1, 2, 4, 5」は歩道ではない



グラフにおける歩道

無向グラフ $G = (V, E)$, G の頂点 $u, v \in V$

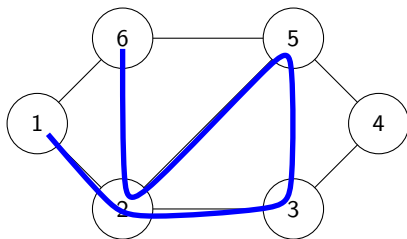
u から v へ至る歩道とは？

G の頂点の列 v_0, v_1, \dots, v_k で次を満たすもの

- ▶ $v_0 = u$ かつ $v_k = v$
- ▶ 任意の $i \in \{0, \dots, k-1\}$ に対して, $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

歩道における辺数 k をその歩道の長さと呼ぶ

例 : 「1, 2, 3, 5, 2, 6」は歩道であるが、「1, 2, 4, 5」は歩道ではない

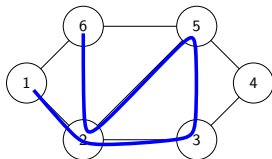


グラフにおける歩道：同値関係

無向グラフ $G = (V, E)$

歩道の性質

- 1 任意の頂点 $v \in V$ に対して, v から v へ至る歩道が存在
- 2 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して,
 u から v へ至る歩道が存在 $\Rightarrow v$ から u へ至る歩道が存在
- 3 任意の頂点 $u, v, w \in V$ に対して,
 u から v へ至る歩道が存在し, v から w へ至る歩道が存在
 $\Rightarrow u$ から w へ至る歩道が存在

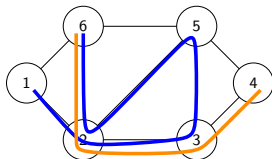
つまり、「歩道が存在」という関係は V 上の同値関係

グラフにおける歩道：同値関係

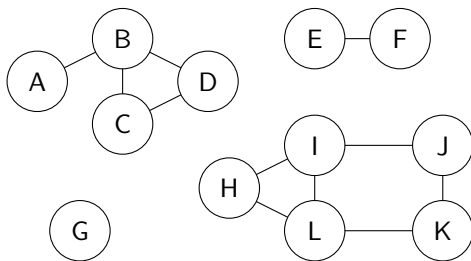
無向グラフ $G = (V, E)$

歩道の性質

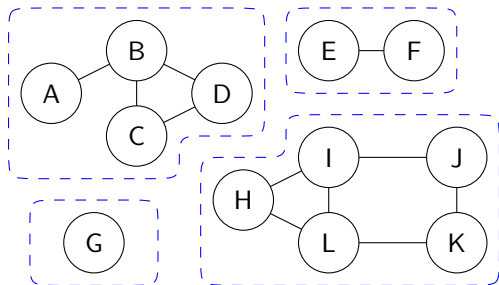
- 1 任意の頂点 $v \in V$ に対して, v から v へ至る歩道が存在
- 2 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して,
 u から v へ至る歩道が存在 $\Rightarrow v$ から u へ至る歩道が存在
- 3 任意の頂点 $u, v, w \in V$ に対して,
 u から v へ至る歩道が存在し, v から w へ至る歩道が存在
 $\Rightarrow u$ から w へ至る歩道が存在

つまり、「歩道が存在」という関係は V 上の同値関係

グラフにおける歩道：同値関係 (続)



グラフにおける歩道：同値関係 (続)



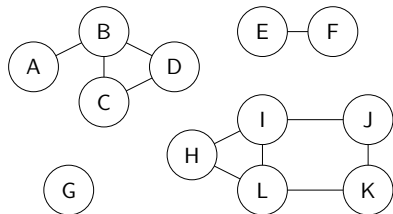
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

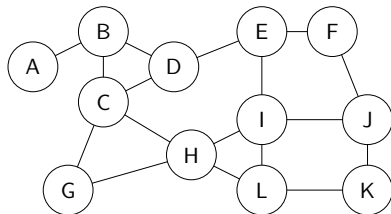
グラフが連結であるとは？

G が**連結**であるとは、
任意の2頂点 $u, v \in V$ に対して、 u から v へ至る歩道が存在すること

連結ではないグラフは**非連結**と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

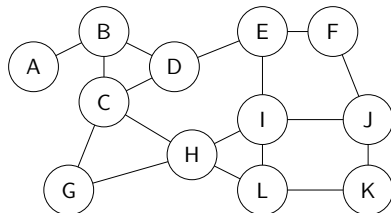
誘導部分グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点部分集合 $U \subseteq V$

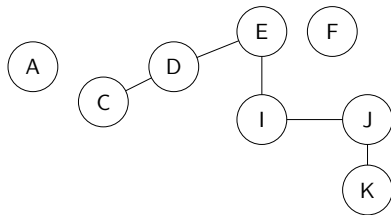
誘導部分グラフとは？

G において U が誘導する部分グラフとは, 次で定義されるグラフ

- ▶ 頂点集合は U
- ▶ 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



G



G の誘導部分グラフではない

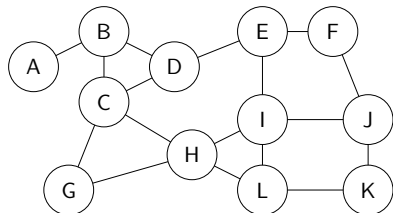
誘導部分グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点部分集合 $U \subseteq V$

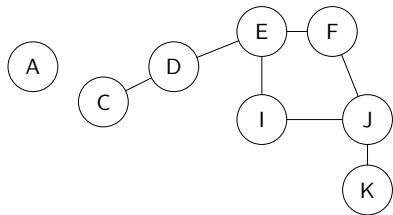
誘導部分グラフとは？

G において U が誘導する部分グラフとは、次で定義されるグラフ

- ▶ 頂点集合は U
- ▶ 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



G



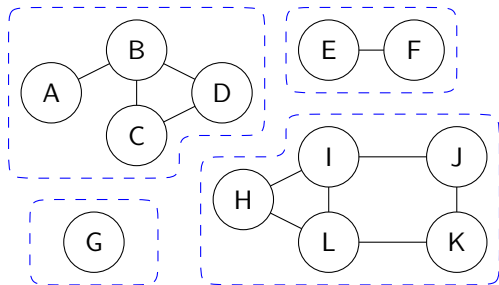
G の誘導部分グラフである

グラフの連結成分

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

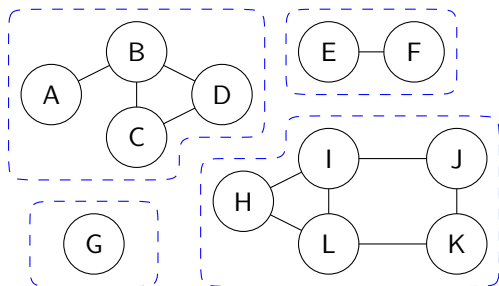
G の連結成分とは、「歩道が存在」という同値関係における同値類 $U \subseteq V$ に対して、 U が誘導する G の部分グラフ



$\{A, B, C, D\}$, $\{E, F\}$, $\{G\}$, $\{H, I, J, K, L\}$ が連結成分を誘導する

グラフの孤立点

次数0の頂点を**孤立点**と呼ぶ



Gは孤立点

グラフの切断辺

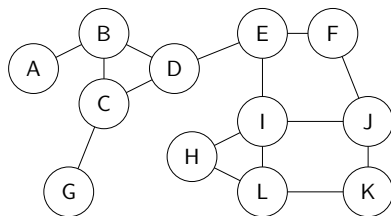
無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

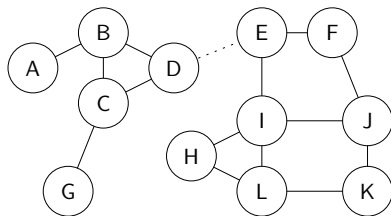
e が G の切断辺であるとは,
 G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{D, E\}$ は G の切断辺



G



$G - \{D, E\}$

グラフの切断点

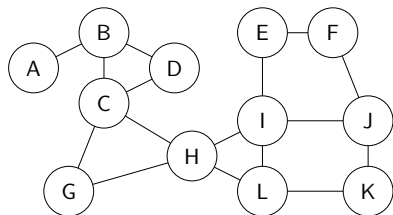
無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

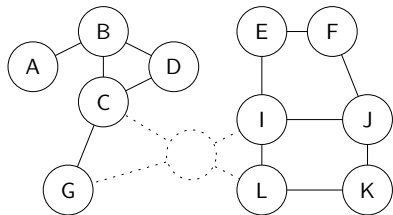
v が G の切断点であるとは,
 G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

H は G の切断点 (「 v を除去」とは, v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



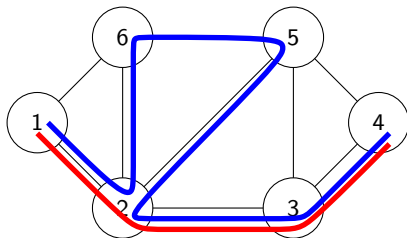
$G - H$

最短歩道は道である

無向グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $u, v \in V$

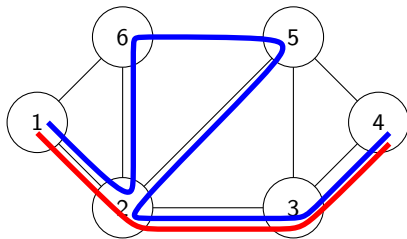
最短歩道は道である

u から v へ至る長さ最小の歩道は道である .



最短歩道は道である：証明の着想

証明の着想：同じ頂点を複数回通る歩道は短絡できる



- ▶ 青い歩道：1, 2, 6, 5, 2, 3, 4
- ▶ 赤い歩道：1, 2, 3, 4

なので，青い歩道は長さ最小の歩道ではない

最短歩道は道である：証明

証明： W を u から v へ至る長さ最小の歩道とする．

- ▶ 証明したいことは， W において複数回現れる頂点がないこと．
- ▶ **背理法**：頂点 w が W において複数回現れると仮定する．

▶ 矛盾．

最短歩道は道である：証明

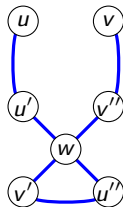
証明： W を u から v へ至る長さ最小の歩道とする。

- ▶ 証明したいことは， W において複数回現れる頂点がないこと．
- ▶ **背理法**：頂点 w が W において複数回現れると仮定する．
- ▶ このとき，ある頂点 u', u'', v', v'' が存在して， W は

$$W = u, \dots, u', w, v', \dots, u'', w, v'', \dots, v$$

という頂点の列になっている．

矛盾．



最短歩道は道である：証明

証明： W を u から v へ至る長さ最小の歩道とする．

- ▶ 証明したいことは， W において複数回現れる頂点がないこと．
- ▶ **背理法**：頂点 w が W において複数回現れると仮定する．
- ▶ このとき，ある頂点 u', u'', v', v'' が存在して， W は

$$W = u, \dots, u', w, v', \dots, u'', w, v'', \dots, v$$

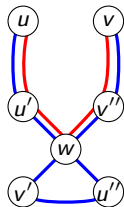
という頂点の列になっている．

- ▶ しかし，このとき

$$u, \dots, u', w, v'', \dots, v$$

も u から v へ至る歩道であり， W より短い．

- ▶ これは W の長さが最小であることに**矛盾**．
- ▶ したがって， W には複数回現れる頂点がない． □



目次

① グラフの連結性と連結成分

② 木

③ グラフの全域木

④ 今日のまとめ

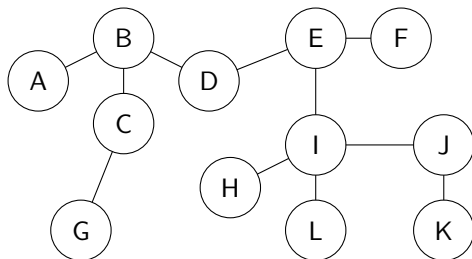
木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは、次の2つの条件を満たすこと

- ▶ G は連結である
- ▶ G は閉路を部分グラフとして含まない

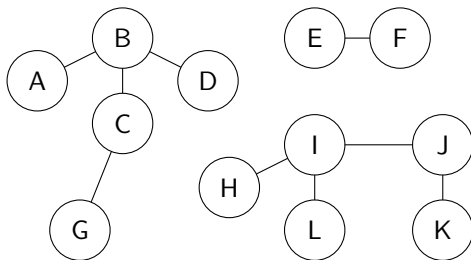


無向グラフ $G = (V, E)$

森とは？

G が森 (または林) であるとは、次の条件を満たすこと

- ▶ G は閉路を部分グラフとして含まない



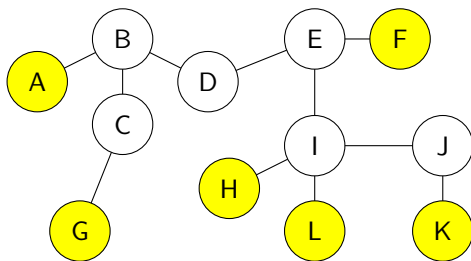
木は森であり、森の各連結成分は木である

木と葉

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$

木は葉を持つ

G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在する

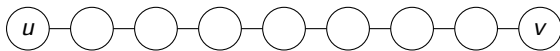


木における次数 1 の頂点を葉と呼ぶ

木は葉を持つ：証明 (1)

最大値論法に基づく．

- ▶ G に含まれる長さ最大の道を P とする．

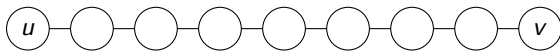


木は葉を持つ：証明 (1)

最大値論法に基づく．

- ▶ G に含まれる長さ最大の道を P とする．
- ▶ $|V| \geq 2$ なので， P の頂点数は 2 以上．
- ▶ P の端点を u, v とする．

(このとき， P の頂点数が 2 以上であることから， $u \neq v$ ．)



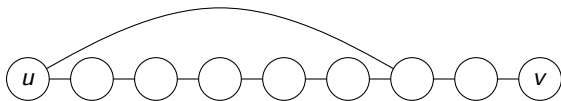
木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**： u の次数が 2 以上であると仮定する。
- ▶ **矛盾**。
- ▶ したがって、 u の次数は 1 である。



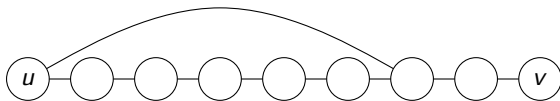
木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**： u の次数が 2 以上であると仮定する．
- ▶ P が長さ最大の道であることから， G は閉路を含む．
- ▶ これは G が木であることに**矛盾**．
- ▶ したがって， u の次数は 1 である．



木は葉を持つ：証明 (2)

- ▶ **背理法**： u の次数が 2 以上であると仮定する．
- ▶ P が長さ最大の道であることから， G は閉路を含む．
- ▶ これは G が木であることに**矛盾**．
- ▶ したがって， u の次数は 1 である．
- ▶ 同様に， v の次数も 1 である．

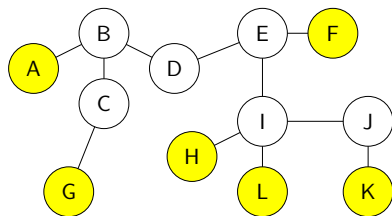


木における葉の役割

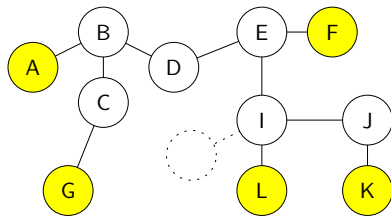
木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



G



G - H

格言

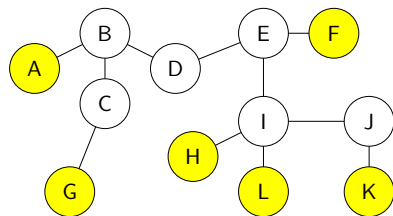
仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

木における葉の役割

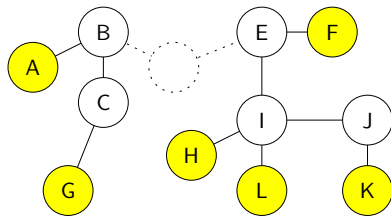
木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



G



G - D

格言

仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

木から葉を除去しても木：証明の着想

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

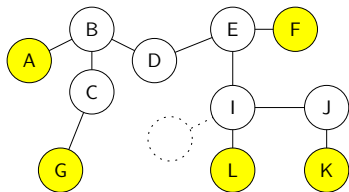
木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明の着想：定義に戻る

木であることの定義

- ▶ 連結である
 - ▶ 閉路を含まない
-
- ▶ $G - v$ が閉路を含まないことは簡単に分かる
 - ▶ $G - v$ の任意の2頂点 u, w に対して, u から w に至る歩道が存在すればよい
 - ▶ G において, u から w に至る歩道で, v を通らないものが存在すればよい



木から葉を除去しても木：証明 (1)

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明： $G - v$ が閉路を含まず，かつ，連結であることを示す．

[閉路を含まないこと]

- ▶ G は木なので， G は閉路を含まない
- ▶ $G - v$ は G の部分グラフなので， $G - v$ も閉路を含まない．

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- ▶ G において, u から w に至る歩道で, v を通らないものが存在すればよい.
- ▶ G における u から w に至る歩道で, **長さ最小のものを** W とする. (示したいこと: W が v を通らないこと)



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- ▶ G において, u から w に至る歩道で, v を通らないものが存在すればよい.
- ▶ G における u から w に至る歩道で, **長さ最小のものを** W とする. (示したいこと: W が v を通らないこと)
- ▶ **背理法**: W が v を通ると仮定する.

▶

矛盾.

- ▶ したがって, W は v を通らない.

□

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- ▶ G において, u から w に至る歩道で, v を通らないものが存在すればよい.
- ▶ G における u から w に至る歩道で, **長さ最小のものを** W とする. (示したいこと: W が v を通らないこと)
- ▶ **背理法**: W が v を通ると仮定する.
- ▶ v は G の葉なので, G における v の隣接頂点を v' とすると,

$$W = u, \dots, v', v, v', \dots, w$$

と書ける.

▶

矛盾.

- ▶ したがって, W は v を通らない. □

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- ▶ G において, u から w に至る歩道で, v を通らないものが存在すればよい.
- ▶ G における u から w に至る歩道で, **長さ最小のもの**を W とする. (示したいこと: W が v を通らないこと)
- ▶ **背理法**: W が v を通ると仮定する.
- ▶ v は G の葉なので, G における v の隣接頂点を v' とすると,

$$W = u, \dots, v', v, v', \dots, w$$

と書ける.

- ▶ この列において v' と v が連続する箇所を取り除いた列

$$u, \dots, v', \dots, w$$

も G における u から w へ至る歩道であるが, W よりも短いので, W の最小性に**矛盾**.

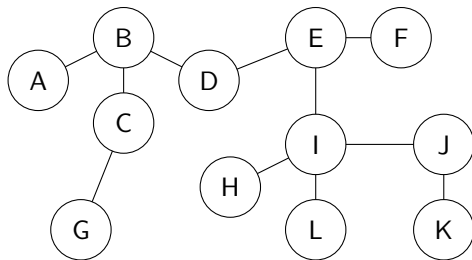
- ▶ したがって, W は v を通らない. □

木の辺数

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$



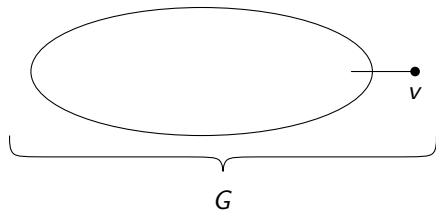
$$|V| = 12, |E| = 11$$

木の辺数：証明の着想

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$

証明： $|V|$ に関する帰納法

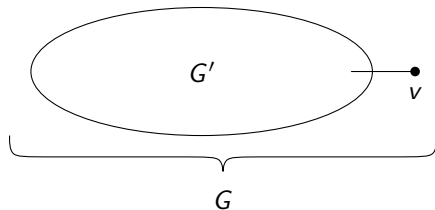
- ▶ $|V| \geq 2$ のとき， G には葉 v が存在
- ▶ $G' = G - v$ として帰納法の仮定を適用

木の辺数：証明の着想

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$

証明： $|V|$ に関する帰納法

- ▶ $|V| \geq 2$ のとき， G には葉 v が存在
- ▶ $G' = G - v$ として帰納法の仮定を適用

木の辺数：証明

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$

証明： $|V|$ に関する帰納法

- ▶ $|V| = 1$ のとき， $|E| = 0$ なので成立．
- ▶ $k \geq 1$ として， $|V| = k$ のときに成り立つことを仮定する．
- ▶ $|V| = k + 1$ のときを考える．
- ▶ $|V| = k + 1 \geq 2$ なので， G には葉 v が存在する．
- ▶ $G - v = (V', E')$ も木で， $|V'| = |V| - 1$ かつ $|E'| = |E| - 1$ ．
- ▶ 帰納法の仮定から， $|E'| = |V'| - 1$ ．
- ▶ したがって， $|E| = |V| - 1$ ．



補足：グラフにおける帰納法

$|V| = k$ のときに成り立つことを仮定する，というのは
 $|V| = k$ であるようなすべての場合に対して成り立つことを仮定する，
という意味

$|V| = 5$ のときに成り立つ，と仮定したら...

次の3つ木 $G = (V, E)$ について， $|E| = |V| - 1$ であることを仮定している

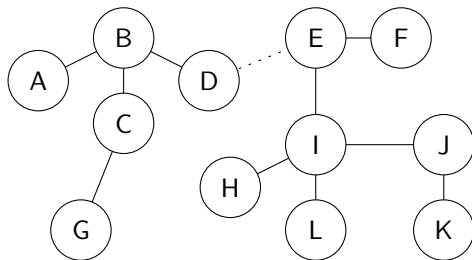


木においてどの辺も切断辺である

木 $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である



木においてどの辺も切断辺である：証明

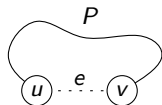
木 $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である

証明 : $e = \{u, v\}$ とする .

- ▶ **背理法** : e が切断辺でないと仮定する .
- ▶ e は切断辺でないので, $G - e$ は連結 .
- ▶ $\therefore G - e$ には u から v へ至る道 P が存在 .
(注 : 長さ最小の歩道は道)
- ▶ P と e を組み合わせると閉路が出現 .
- ▶ G が閉路を含まないことに**矛盾** .
- ▶ したがって, e は切断辺である . □

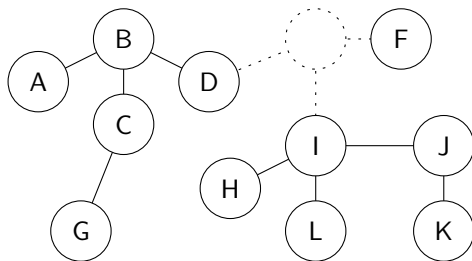


木において葉以外のどの頂点も切断点である

木 $G = (V, E)$, 葉ではない頂点 $v \in V$

木において葉以外のどの頂点も切断点である

v は G の切断点である



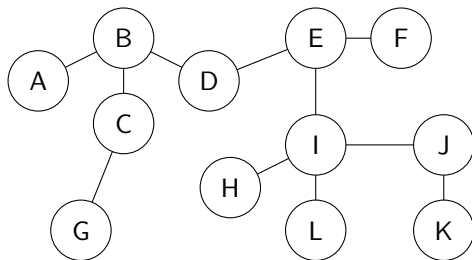
証明は演習問題

木と道

木 $G = (V, E)$, $u, v \in V$

木の2点間を結ぶ道はただ1つ

G において u と v を結ぶ道はただ1つ存在する



証明の着想 :

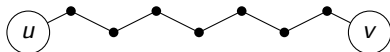
- ▶ u, v を結ぶ道の上の辺はどれも切断辺であることに着目

木の2点間を結ぶ道はただ1つ：証明

証明： G は連結なので， u, v を結ぶ道が1つは存在する．

▶ それを P とする．

▶ したがって， G において u と v を結ぶ道はすべて e を通る．



木の2点間を結ぶ道はただ1つ：証明

証明： G は連結なので， u, v を結ぶ道が1つは存在する．

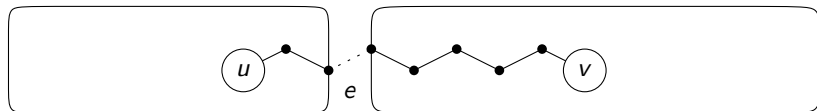
- ▶ それを P とする．
 - ▶ e を P の任意の辺とする．
-
- ▶ したがって， G において u と v を結ぶ道はすべて e を通る．



木の2点間を結ぶ道はただ1つ：証明

証明： G は連結なので， u, v を結ぶ道が1つは存在する．

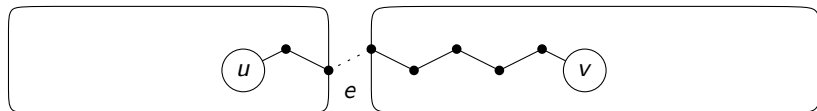
- ▶ それを P とする．
- ▶ e を P の任意の辺とする．
- ▶ e は G の切断辺であり， $G - e$ において， u と v は異なる連結成分に属する．
- ▶ したがって， G において u と v を結ぶ道はすべて e を通る．



木の2点間を結ぶ道はただ1つ：証明

証明： G は連結なので， u, v を結ぶ道が1つは存在する．

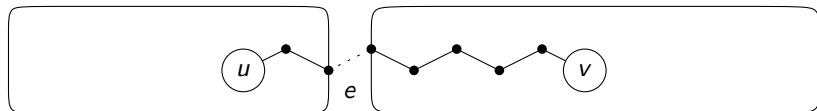
- ▶ それを P とする．
- ▶ e を P の任意の辺とする．
- ▶ e は G の切断辺であり， $G - e$ において， u と v は異なる連結成分に属する．
- ▶ したがって， G において u と v を結ぶ道はすべて e を通る．
- ▶ e は任意の辺なので， u と v を結ぶ道は P の辺をすべて通る．



木の2点間を結ぶ道はただ1つ：証明

証明： G は連結なので， u, v を結ぶ道が1つは存在する．

- ▶ それを P とする．
- ▶ e を P の任意の辺とする．
- ▶ e は G の切断辺であり， $G - e$ において， u と v は異なる連結成分に属する．
- ▶ したがって， G において u と v を結ぶ道はすべて e を通る．
- ▶ e は任意の辺なので， u と v を結ぶ道は P の辺をすべて通る．
- ▶ したがって， P 以外に u と v を結ぶ道は存在しない． □



目次

① グラフの連結性と連結成分

② 木

③ **グラフの全域木**

④ 今日のまとめ

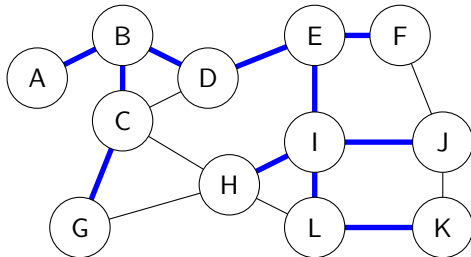
グラフの全域木

無向グラフ $G = (V, E)$

全域木とは？

 G の全域木とは、次を満たす G の部分グラフ G'

- ▶ G' は木 (連結で、閉路を含まない)
- ▶ G' の頂点集合は V

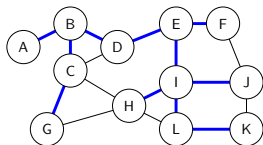
 G が非連結であるとき、 G の全域木は存在しない

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在



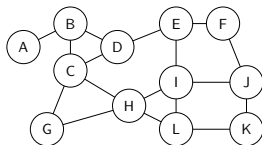
証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

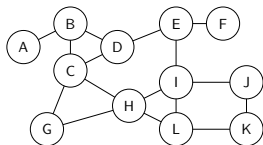
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

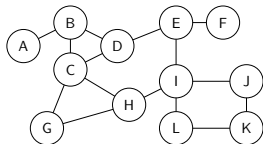
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

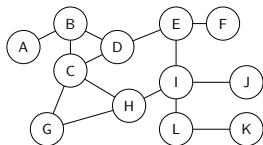
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

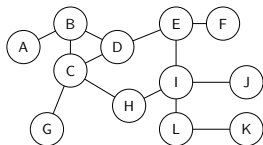
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

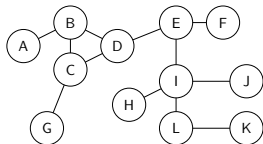
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

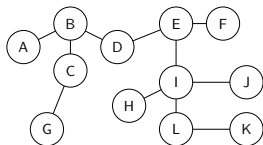
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

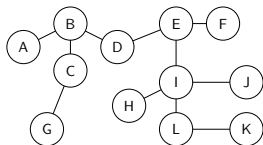
 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

 G が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在証明の着想 : G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる (?)

閉路から辺を除去しても連結

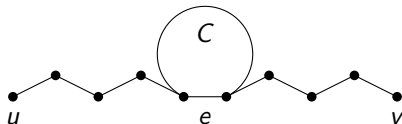
連結無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

補題 (閉路から辺を除去しても連結)

e が G の閉路に含まれる $\Rightarrow G - e$ も連結

証明の着想：定義に戻る

- ▶ $G - e$ において、任意の2頂点 u, v の間に歩道が存在すればよい
- ▶ G は連結なので、 G において u, v の間に歩道は存在
- ▶ それが e を通るときが問題



注：補題とは、定理の証明に用いる補助的な命題

閉路から辺を除去しても連結

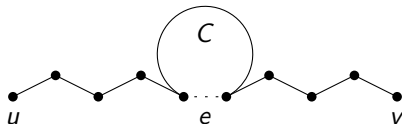
連結無向グラフ $G = (V, E)$, 辺 $e \in E$

補題 (閉路から辺を除去しても連結)

e が G の閉路に含まれる $\Rightarrow G - e$ も連結

証明の着想：定義に戻る

- ▶ $G - e$ において、任意の2頂点 u, v の間に歩道が存在すればよい
- ▶ G は連結なので、 G において u, v の間に歩道は存在
- ▶ それが e を通るときが問題

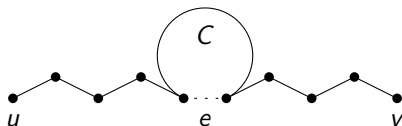


注：補題とは、定理の証明に用いる補助的な命題

閉路から辺を除去しても連結：証明

証明：任意の2頂点 u, v を考える．

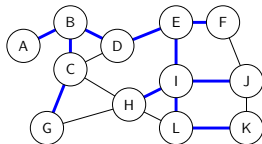
- ▶ G は連結なので， G において u, v の間に歩道は存在する．
- ▶ それを W とする．
- ▶ W が e を通らないとき， W は $G - e$ における歩道である．
- ▶ W が e を通るとき， $C - e$ が e の端点間の歩道を作るので，それを使って， u, v 間の別の歩道を作れる．
- ▶ これは， e を通らないので， $G - e$ における歩道である．
- ▶ したがって， $G - e$ において u, v 間に歩道が存在する． □



証明したかったことに戻る

証明したかったこと：連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ が連結 $\Rightarrow G$ の全域木が存在



証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- ▶ G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- ▶ これを閉路がなくなるまで繰り返す
- ▶ 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる!!!

連結グラフは全域木を含む：証明

証明： $|E|$ に関する帰納法．

- ▶ $|E| = 0$ のときは成立する．
- ▶ $|E| = k$ のときに成立すると仮定して， $|E| = k + 1$ のときに成立することを示す．
- ▶ G は連結であるので， G が閉路を含まなければ， G 自身が G の全域木である．
- ▶ G が閉路 C を含むと仮定する．
- ▶ C の辺 e を任意に選ぶ．
- ▶ 補題より， $G - e$ も連結である．
- ▶ 帰納法の仮定より， $G - e$ は全域木を含む．
- ▶ $G - e$ は G の部分グラフなので，この全域木は G の全域木でもある．



補足：帰納法とアルゴリズム

- ▶ 「証明の着想」では，順に辺を取り除くというアルゴリズムを考えた．
- ▶ 実際の「証明」では，帰納法を使った．

格言

- ▶ 帰納法はアルゴリズム的な着想を証明に書き直すための技法
- ▶ 帰納法の証明を素直にたどるとアルゴリズムが得られる

有限の世界において「帰納法はアルゴリズムそのもの」という視点が大事

目次

① グラフの連結性と連結成分

② 木

③ グラフの全域木

④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

「木」を理解する

- ▶ 木の定義を理解する
- ▶ 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる
- ▶ グラフの全域木を理解する

証明技法

- ▶ 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

目次

① グラフの連結性と連結成分

② 木

③ グラフの全域木

④ 今日のまとめ