数理解析 第 9 回
グラフにおける極値問題

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 12 月 4 日

最終更新：2013 年 1 月 14 日　23:42

目次

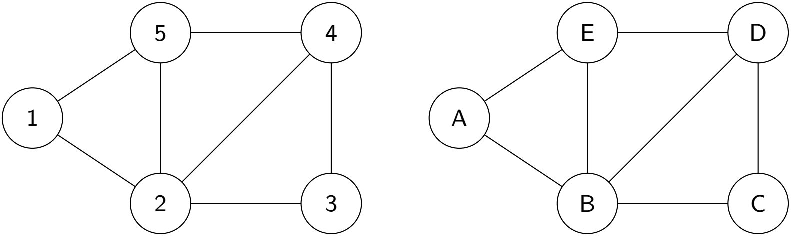
概要

今日の目標

- グラフの同型性を理解する
- 代表的なグラフを理解する
- 最大性論法／最小性論法が使えるようになる
- 「極値問題」の意味と重要性を理解する

「同じ」グラフとは？ (1)

次の 2 つのグラフを見てみる



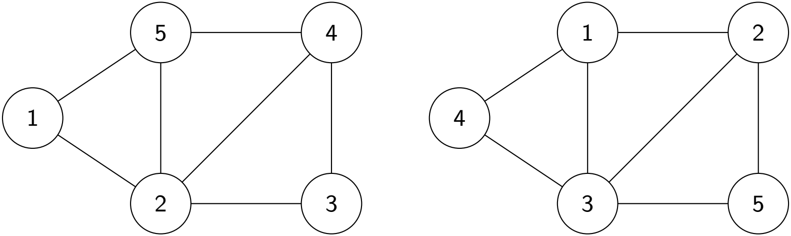
- **頂点同士の「つながり方」は同じである**
- **しかし，頂点集合，辺集合は異なる**
- **したがって，この 2 つは「同じグラフではない」**

でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

「同じ」グラフとは？ (2)

次の 2 つのグラフを見てみる



- 頂点同士の「つながり方」は同じである
- しかし，辺集合は異なる
- したがって，この 2 つは「同じグラフではない」

でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

同型写像 (有向グラフの場合)

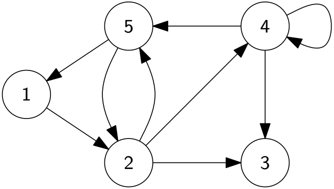
2 つの有向グラフ $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への**同型写像**とは，全単射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ で次を満たすもの

- 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して，

$$(u, v) \in A_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$$



$\varphi(1) = \mathrm{A}, \varphi(2) = \mathrm{B}, \varphi(3) = \mathrm{C}, \varphi(4) = \mathrm{D}, \varphi(5) = \mathrm{E}$

同型写像 (無向グラフの場合)

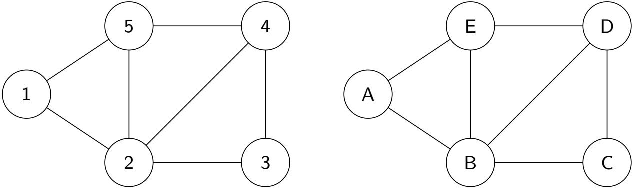
2 つの無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

同型写像とは？

G_1 から G_2 への**同型写像**とは，全単射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ で次を満たすもの

- 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して，

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$



$\varphi(1) = \mathrm{A}, \varphi(2) = \mathrm{B}, \varphi(3) = \mathrm{C}, \varphi(4) = \mathrm{D}, \varphi(5) = \mathrm{E}$

同型なグラフ

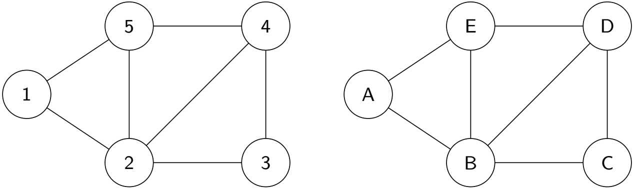
同型なグラフとは？

G_1 から G_2 への同型写像が存在するとき，
G_1 と G_2 は同型であるといい，

$$G_1 \simeq G_2$$

と書き表す

次の 2 つのグラフは同型



同型である，という関係は同値関係

Γ を「すべての無向グラフを要素として持つ集合」とする

- 「$\simeq$」は Γ 上の関係

$\simeq$ の重要な性質

$\simeq$ は Γ 上の同値関係

つまり，$\simeq$ は次の 3 つの性質を満たす

- 任意の $G \in \Gamma$ に対して，$G \simeq G$ (反射性)
- 任意の $G_1, G_2 \in \Gamma$ に対して，$G_1 \simeq G_2$ ならば $G_2 \simeq G_1$ (対称性)
- 任意の $G_1, G_2, G_3 \in \Gamma$ に対して，$G_1 \simeq G_2$ かつ $G_2 \simeq G_3$ ならば $G_1 \simeq G_3$ (推移性)

$\simeq$ の反射性：証明 (1)

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

$\simeq$ の反射性：証明 (1)

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，同型写像 $\varphi \colon V \to V$ が存在する

格言

証明の基本は定義に基づいて書き直すこと

$\simeq$ の反射性：証明 (1)

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，同型写像 $\varphi\colon V \to V$ が存在する

さらに，定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，全単射 $\varphi\colon V \to V$ で次を満たすものが存在する

- 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$

証明の方針：そのような全単射 φ を実際に構成する

格言

証明の基本は定義に基づいて書き直すこと

$\simeq$ の反射性：証明 (2)

- 任意の無向グラフ G に対して，G から G への同型写像が存在することを証明すればよい．
- すなわち，任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，全単射 $\varphi\colon V \to V$ で次を満たすものが存在することを証明すればよい．
  - 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$

- そのような全単射として，恒等関数 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ を考える．
- このとき，任意の頂点 $u, v \in V$ に対して

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathrm{id}_V(u), \mathrm{id}_V(v)\} \in E$$

  である．
- したがって，id_V は G から G への同型写像である． $\square$

$\simeq$ の対称性と推移性の証明は演習問題

対称性に関するヒント

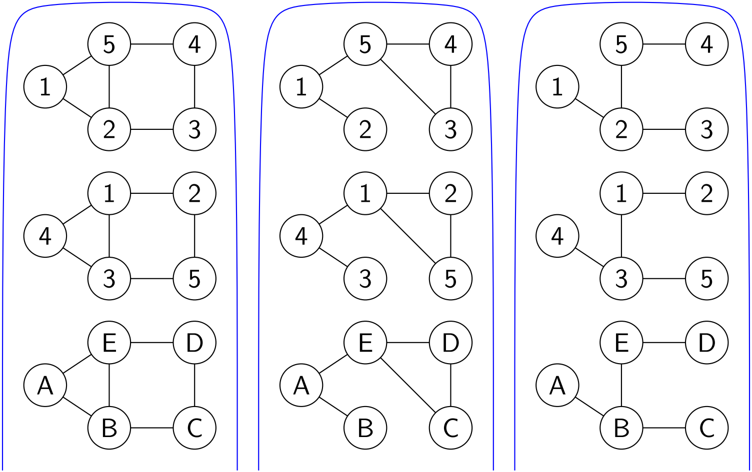
- 無向グラフ G_1, G_2 に対して，G_1 から G_2 への同型写像 φ が存在すると仮定する
- φ は全単射なので，逆関数 φ^{-1} が存在し，それも全単射 (演習問題参照)
- φ^{-1} が G_2 から G_1 への同型写像になることを証明すればよい

推移性に関するヒント

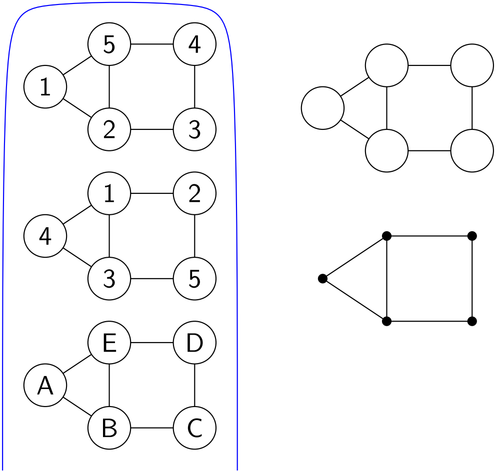
- 無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して，G_1 から G_2 への同型写像 φ_1 と G_2 から G_3 への同型写像 φ_2 が存在すると仮定する
- 合成関数 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ を考えると，φ_1, φ_2 が全単射なので，これも全単射 (演習問題参照)
- $\varphi_2 \circ \varphi_1$ が G_1 から G_3 への同型写像になることを証明すればよい

グラフの同型類

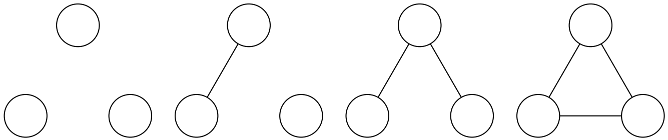
商集合 $\Gamma/\simeq$ の要素をグラフの同型類と呼ぶ



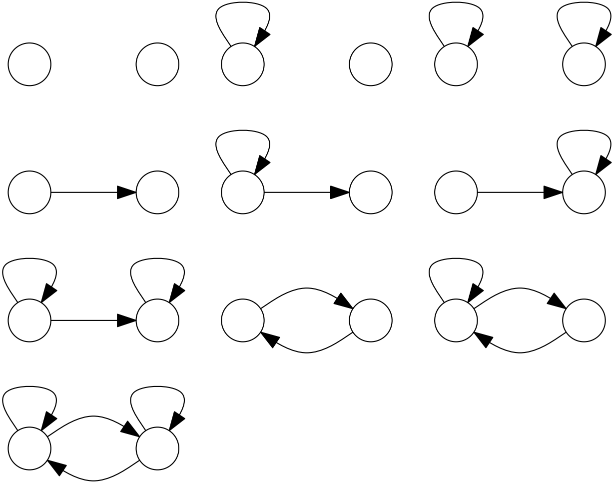
グラフの同型類の図示



頂点数 3 の無向グラフの同型類すべて

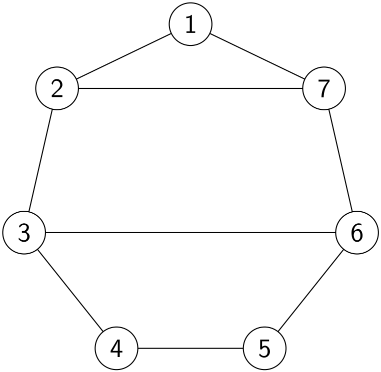


頂点数 2 の有向グラフの同型類すべて

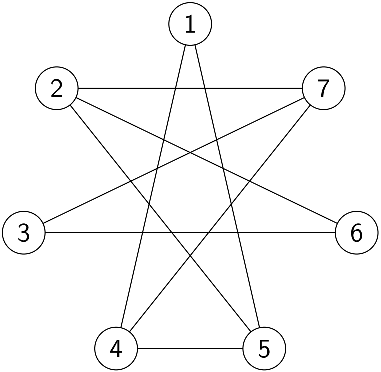


例題：グラフの同型性 (1)

次の 2 つの無向グラフ G_1, G_2 に対して，
G_1 から G_2 への同型写像を 1 つ見つけよ



G_1



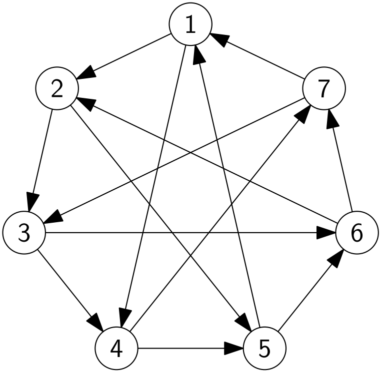
G_2

同型写像を φ とすると

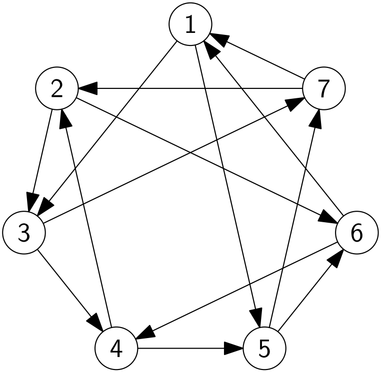
$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 6, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 5$$

例題：グラフの同型性 (2)

次の 2 つの有向グラフ G_1, G_2 に対して，
G_1 から G_2 への同型写像を 1 つ見つけよ



G_1



G_2

同型写像を φ とすると

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 5, \varphi(5) = 7, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6$$

[上級] 同型性 $\simeq$ に関する補足

いま示したこと

Γ を「すべての無向グラフを要素として持つ集合」とする

- 「$\simeq$」は Γ 上の関係

$\simeq$ の重要な性質

$\simeq$ は Γ 上の同値関係

注意

- Γ は本当に集合なのか？ (サイズが大きすぎる)
- そのため「$\simeq$ は Γ 上の関係」であると言ってはいけない？

目次

完全グラフ

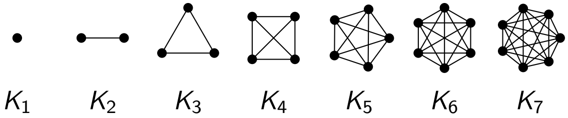
無向グラフ $G = (V, E)$，**自然数** $n \in \mathbb{N}$

完全グラフとは？

G **が次のグラフと同型であるとき，**G **は頂点数** n **の完全グラフと呼ばれる**

- **頂点集合** $= \{1, 2, \ldots, n\}$
- **辺集合** $= \{\{u, v\} \mid 1 \leq u < v \leq n\}$

頂点数 n **の完全グラフを** K_n **と表記する**



道 (パス)

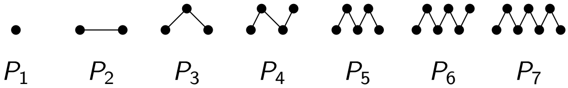
無向グラフ $G = (V, E)$，**自然数** $n \in \mathbb{N}$

道とは？

G **が次のグラフと同型であるとき，** G **は頂点数** n **の道と呼ばれる**

- **頂点集合** $= \{1, 2, \ldots, n\}$
- **辺集合** $= \{\{u, u+1\} \mid u \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$

頂点数 n **の道を** P_n **と表記する**



- P_n **における次数** 1 **の頂点を** P_n **の端点と呼ぶ**
- P_n **は次数** 1 **の** 2 **頂点を結ぶ道とも呼ばれる**
- P_n **の辺数** $n-1$ **のことを** P_n **の長さと呼ぶ**

閉路 (サイクル)

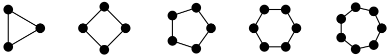
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

閉路とは？

G が次のグラフと同型であるとき，G は頂点数 n の**閉路**と呼ばれる

- 頂点集合 $= \{1, 2, \ldots, n\}$
- 辺集合 $= \{\{u, u+1\} \mid u \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{\{1, n\}\}$

頂点数 n の閉路を C_n と表記する



C_3　C_4　C_5　C_6　C_7

- C_n の辺数 n のことを C_n の**長さ**と呼ぶ

二部グラフ

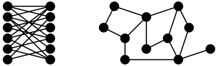
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ **が存在するとき，** G **は二部グラフと呼ばれる**

- $A \cup B = V$**，かつ，** $A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ **ならば，** $\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ **かつ** $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



二部グラフ

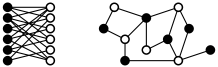
無向グラフ $G = (V, E)$

二部グラフとは？

次を満たす $A, B \subseteq V$ **が存在するとき，**G **は二部グラフと呼ばれる**

- $A \cup B = V$，**かつ，** $A \cap B = \emptyset$
- $\{u, v\} \in E$ **ならば，**$\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ **かつ** $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$

二部グラフの例



完全二部グラフ

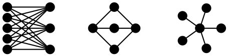
無向グラフ $G = (V, E)$，**自然数** $m, n \in \mathbb{N}$

完全二部グラフとは？

G **が次のグラフと同型であるとき，**G **は完全二部グラフと呼ばれる**

- **頂点集合** $= \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- **辺集合** $= \{\{a_i, b_j\} \mid i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$

完全二部グラフを $K_{m,n}$ **と表記する**



$K_{5,3}$ $K_{2,3}$ $K_{1,5}$

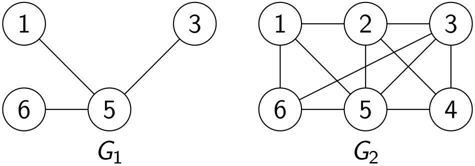
部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

部分グラフとは？

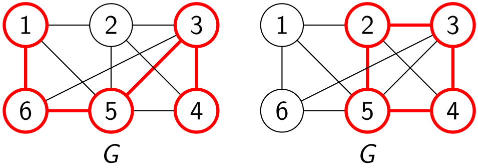
G_1 が G_2 の**部分グラフ**であるとは，次を満たすこと

- $V_1 \subseteq V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$



部分グラフとしての道と閉路

無向グラフ $G = (V, E)$ が道 (閉路) を部分グラフとして含むとき，その道 (閉路) の頂点を順に並べることで表現することがある



この場合，$1, 6, 5, 3, 4$ **は** G **に含まれる道，**$2, 3, 4, 5$ **は** G **に含まれる閉路**

- **すなわち，頂点の列** $v_1, \ldots, v_n \in V$ **が** G **に含まれる道であるとは**

  任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **に対して，**$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

  となること
- **同様に，頂点の列** $v_1, \ldots, v_n \in V$ **が** G **に含まれる閉路であるとは**

  任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **に対して，**$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$**，かつ，**

  $\{v_n, v_1\} \in E$

  となること

目次

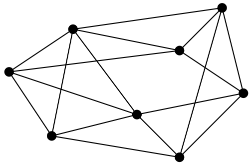
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，**自然数** $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ **は** P_k **を含む**

例



格言

「自明に間違ってはいない」ことを常に確認する

証明の方針：G **に含まれる長さ最大の道を考える**

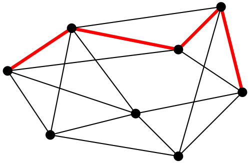
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，**自然数** $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ **は** P_k **を含む**

例



格言

「自明に間違ってはいない」ことを常に確認する

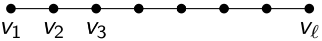
証明の方針：G **に含まれる長さ最大の道を考える**

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．

イメージ図



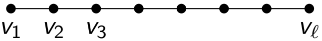
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．

- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図



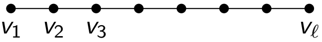
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．

- したがって，$\ell \geq k$． $\square$

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

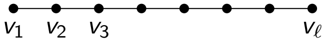
G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．

- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

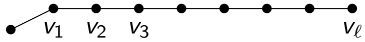
G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．

- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図

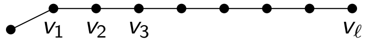


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．
- したがって，
  $\ell - 1 = P$ における v_1 以外の頂点数
- したがって，$\ell \geq k$．$\square$

イメージ図



最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

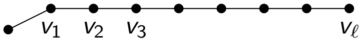
G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，

  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．
- したがって，

  $\ell - 1 = P$ における v_1 以外の頂点数 $\geq \deg_G(v_1)$
- したがって，$\ell \geq k$． □

イメージ図

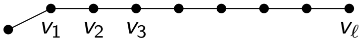


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

G に含まれる長さ最大の道を P とする．

- P の頂点集合を $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ とする．
- このとき，$\ell \geq k$ であることを示せばよい．
- v_1 が P の端点であるとする．
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である．
- したがって，
  $\ell - 1 = P$ における v_1 以外の頂点数 $\geq \deg_G(v_1) \geq \delta(G) \geq k - 1$．
- したがって，$\ell \geq k$． $\square$

イメージ図



証明手法：最大性論法，最小性論法

最大性論法とは？

離散数学における重要な証明手法の 1 つ

1. ある性質を満たす部分集合で要素数最大のものを考える
2. その最大性を利用して，証明を進める

コメント

- 「最小次数が大きいグラフは長い道を含む」の証明は最大性論法に基づく
- グラフ理論においては，頂点数が有限であることから，要素数最大の部分集合が存在することは確認できる
- 同様に「最小性論法」もある
- 他の例は後の演習問題と講義の中で

疑問

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む (再掲)

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

疑問

次の命題が正しいような h の値は何か？

$$\delta(G) \geq h \Rightarrow G \text{ は } P_k \text{ を含む}$$

h	2	3	$\cdots$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$
真偽					真			

疑問

無向グラフ $G = (V, E)$**，自然数** $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む (再掲)

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ **は** P_k **を含む**

疑問

次の命題が正しいような h **の値は何か？**

$$\delta(G) \geq h \Rightarrow G \text{ は } P_k \text{ を含む}$$

h	2	3	$\cdots$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$
真偽					**真**	**真**	**真**	$\cdots$

最小次数が小さいと，長い道を含まないかもしれない

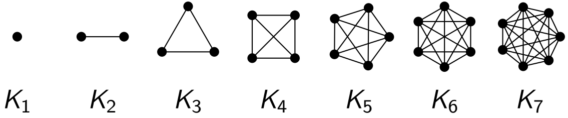
自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$，**自然数** $h \in \mathbb{N}$，$h \leq k - 2$

今から示すこと

ある無向グラフ G **は次を同時に満たす**

- $\delta(G) = h$
- G **は** P_k **を含まない**

(「$h \leq k - 2$」**に注意**)



最小次数が小さいと，長い道を含まないかもしれない

自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$，自然数 $h \in \mathbb{N}$，$h \leq k-2$

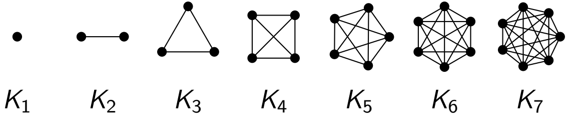
今から示すこと

ある無向グラフ G は次を同時に満たす

- $\delta(G) = h$
- G は P_k を含まない

(「$h \leq k-2$」に注意)

証明：そのようなグラフを実際に構成すればよい．



最小次数が小さいと，長い道を含まないかもしれない

自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$，自然数 $h \in \mathbb{N}$，$h \leq k - 2$

今から示すこと

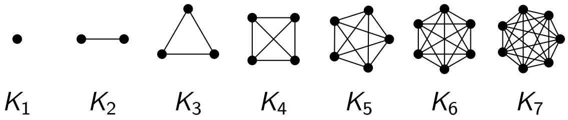
ある無向グラフ G は次を同時に満たす

- $\delta(G) = h$
- G は P_k を含まない

(「$h \leq k - 2$」に注意)

証明：そのようなグラフを実際に構成すればよい．

- $G = K_{h+1}$ とする．
- このとき，$\delta(G) = h$．



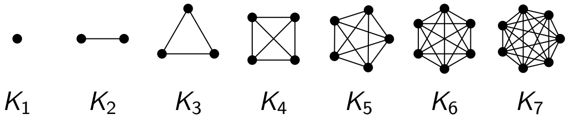
最小次数が小さいと，長い道を含まないかもしれない：続き

証明しなくてはならないこと

K_{h+1} が P_k を含まない (注意：$h \leq k-2$)

そのことの証明：

- K_{h+1} が P_k を含むならば，K_{h+1} の頂点数は k 以上でないといけない．
- 一方，K_{h+1} の頂点数は $h+1$ で，$h+1 \leq k-1$．
- したがって，K_{h+1} は P_k を含まない． □



疑問：続

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む (再掲)

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

疑問

次の命題が正しいような h の値は何か？

$$\delta(G) \geq h \Rightarrow G \text{ は } P_k \text{ を含む}$$

h	2	3	$\cdots$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$
真偽					真	真	真	$\cdots$

疑問：続

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む (再掲)

$\delta(G) \geq k-1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

疑問

次の命題が正しいような h の値は何か？

$$\delta(G) \geq h \Rightarrow G \text{ は } P_k \text{ を含む}$$

h	2	3	$\cdots$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$
真偽	偽	偽	$\cdots$	偽	真	真	真	$\cdots$

疑問：続

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む (再掲)

$\delta(G) \geq k - 1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

疑問

次の命題が正しいような h の値は何か？

$$\delta(G) \geq h \Rightarrow G \text{ は } P_k \text{ を含む}$$

h	2	3	$\cdots$	$k-2$	$k-1$	k	$k+1$	$\cdots$
真偽	偽	偽	$\cdots$	偽	真	真	真	$\cdots$

これが「極値問題」の例

離散数学における極値問題とは？

- 次のような形の命題があるとする．

  ある不等式を満たす $\Rightarrow$ ある性質が成り立つ

- この不等式が改良できるのか考える
  - 例えば「〇〇 $\geq 3 \Rightarrow \ldots$」という命題ならば
    これを「〇〇 $\geq 2 \Rightarrow \ldots$」にできるのか考える
- この改良の限界を見つけるのが極値問題

つまり，

最小次数が大きいグラフは長い道を含む (再掲)

$\delta(G) \geq k-1 \Rightarrow G$ は P_k を含む

この命題があり，「$\delta(G) \geq k-1$」という不等式は改善できない

- 改善できない不等式のことを**タイト**と呼ぶ

なぜ極値問題が重要なのか？

アルゴリズムの解析を考える

例えば，次のような場合を想定

問題○○を解くために，
アルゴリズム△△は最悪でも□□時間しか必要としない

このときの疑問

- アルゴリズム△△が最悪の場合に必要とする時間は□□より小さくできないのか？
  (アルゴリズム△△の計算量に関する極値問題)
- 別のアルゴリズムで問題○○を解くと，最悪の場合に必要とする時間は□□より小さくできるのか？
  (問題○○の計算量に関する極値問題)

格言

アルゴリズムの設計と解析は極値問題 (つまり，離散数学の問題)

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの同型性を理解する
- 代表的なグラフを理解する
- 最大性論法／最小性論法が使えるようになる
- 「極値問題」の意味と重要性を理解する

目次