数理解析 第 14 回
ラムゼー理論

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 29 日

最終更新：2013 年 1 月 30 日　09:03

期末試験

- 日時：2/12 (火) 10:40〜12:10
- 場所：西 5–209
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 30 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
  - 科目全体の成績は山本先生担当分と総合して判定
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

概要

今日の目標

ラムゼー理論の基礎概念を理解する
- ラムゼー理論とは何か？
- ラムゼー数
- ラムゼー理論の応用：ゼロ誤り通信路容量

目次

Frank P. Ramsey

イギリスの思想家，経済学者 (1903–1930)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Frank_Plumpton_Ramsey.JPG

ラムゼー理論とは？

D. West の本 ('01) からの引用 (の試訳)

「ラムゼー理論」とは大きな構造の分割に関する研究を指す．典型的な結果は，分割のある類に特殊な部分構造が必ず生起するというものである．モツキンは「完全な無秩序は不可能である」ということばでこれを表現した．我々が考える対称は単に集合や数であり，...

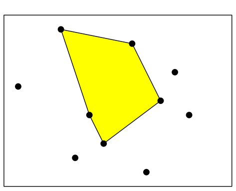
原文："Ramsey theory" refers to the study of partitions of large structures. Typical results state that a special substructure must occur in some class of the partition. Motzkin described this by saying that "Complete disorder is impossible." The objects we consider are merely sets and numbers, ...

格言

物理学に「物理学的現象」，生物学に「生物学的現象」があるように
数学にも「数学的現象」が存在する

ちょっとした例

平面上に，どの 3 点も一直線上にのらないように 10 点置く



必ず，そこには (中に他の点を含まない) 凸五角形が現れる
(Harborth '78)

集合の 2 分割

有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$，自然数 a, b，$n = a + b - 1$

観察

X の任意の 2 分割 $X = X_1 \cup X_2$ に対して (ただし，$X_1 \cap X_2 = \emptyset$)

$$|X_1| \geq a \quad \text{または} \quad |X_2| \geq b$$

が成り立つ

証明：演習問題

集合の r 分割

有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$，自然数 $a_1, \dots, a_r$，$n = a_1 + \cdots + a_r - r + 1$

観察

X の任意の r 分割 $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ に対して
(ただし，任意の $i \neq j \in \{1, \dots, r\}$ に対して $X_i \cap X_j = \emptyset$)

$$|X_1| \geq a_1 \quad \text{または} \quad \cdots \quad \text{または} \quad |X_r| \geq a_r$$

が成り立つ

証明：演習問題

これは鳩の巣原理とも呼ばれる

今から行うこと

- 集合の分割に対する観察をグラフに対して行う
- 特に，完全グラフの辺集合を分割する

目次

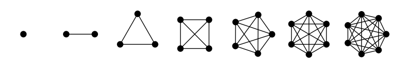
復習：完全グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

完全グラフとは？

G が次のグラフと同型であるとき，G は頂点数 n の完全グラフと呼ばれる
- 頂点集合 $= \{1, 2, \dots, n\}$
- 辺集合 $= \{\{u, v\} \mid 1 \leq u < v \leq n\}$

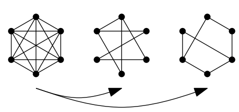
頂点数 n の完全グラフを K_n と表記する



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7

完全グラフの辺集合の分割

K_6 の辺集合を 2 分割して，2 つのグラフを得る



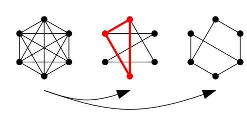
K_6 に対するラムゼー理論

K_6 に対するラムゼー理論

K_6 の辺集合を任意に 2 分割してできたグラフ G_1, G_2 において

$$G_1 \text{ が } K_3 \text{ を含む} \quad \text{または} \quad G_2 \text{ が } K_3 \text{ を含む}$$

が成り立つ

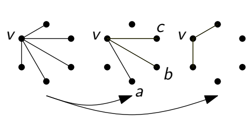


比喩的に，次のような言われ方もする

6 人出席者のいるパーティーでは，互いに知り合いである 3 人組か，
互いに知り合いではない 3 人組が必ず存在する

K_6 に対するラムゼー理論：証明 (1)

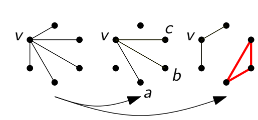
- K_6 の頂点を 1 つ任意に選んで，v とする
- v に接続する辺は 5 つ存在
- その中の 3 つは G_1 か G_2 に存在　　(補足：集合の 2 分割)
- この 3 つが G_1 に存在する場合を考える
  (G_2 に存在する場合も同様)
- その 3 辺に接続する v 以外の頂点を a, b, c とする



K_6 に対するラムゼー理論：証明 (2) 場合分け

場合 1：a, b, c を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれるとき
- a, b, c を頂点集合とする K_3 が G_2 に含まれる

場合 2：そうではないとき
- a, b, c を結ぶ辺の 1 つは G_1 に含まれる
- それを $\{a, b\}$ であるとする (他の場合も同様)
- a, b, v を頂点とする K_3 が G_1 に含まれる □



グラフに対するラムゼー理論とは？

- 完全グラフの辺集合を分割して，グラフ $G_1, \ldots, G_r$ を得る
- このとき，その中のどれかがある大きさの完全グラフを含む

先ほどの例

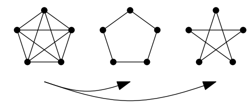
- 頂点数 6 の完全グラフの辺集合を 2 分割
- このとき，どちらかが頂点数 3 の完全グラフを含む

注意

頂点数 6 の完全グラフの辺集合 2 分割でこれが成り立つので，
頂点数 7, 8, 9,... の完全グラフの辺集合を 2 分割しても
どちらかは頂点数 3 の完全グラフを必ず含む

頂点数 5 だとどうか？

K_5 の辺集合を 2 分割しても K_3 は含まれないかもしれない



この意味で，「6」が極値になっている (第 9 回参照)

目次

ラムゼー数

自然数 k, ℓ

ラムゼー数 $R(k, \ell)$ とは？

K_n の辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つような最小の n

先ほどの場合に対応するのは：$R(3, 3) = 6$

- $R(3, 3) \leq 6$：
  K_6 の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ると
  「G_1 が K_3 を含む，または，G_2 が K_3 を含む」が成り立つ
- $R(3, 3) \geq 6$：
  K_5 の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 をうまく作ると
  「G_1 が K_3 を含まず，かつ，G_2 が K_3 を含まない」が成り立つ

ラムゼー数の上界と下界

自然数 k, ℓ

ラムゼー数 $R(k, \ell)$ とは？

K_n の辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つような最小の n

$R(k, \ell) = N$ を証明するには…

- $R(k, \ell) \leq N$ の証明：
  K_N の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ると
  「G_1 が K_k を含む，または，G_2 が K_ℓ を含む」が成り立つ
- $R(k, \ell) \geq N$：
  K_{N-1} の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 をうまく作ると
  「G_1 が K_k を含まず，かつ，G_2 が K_ℓ を含まない」が成り立つ

ラムゼー数に対する疑問

疑問

任意の自然数 k, ℓ に対して，十分に大きな N を考えると
K_N の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

は成り立つのか？

疑問：別の言い方

任意の自然数 k, ℓ に対して，$R(k, \ell)$ は存在するのか？

ラムゼー数の存在性

グラフに対するラムゼーの定理

任意の自然数 k, ℓ に対して，ある自然数 N が存在して
K_N の辺集合を 2 分割して G_1, G_2 を任意に作ると

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つ

わざわざ難しく書くと

- $\forall$ 自然数 k, ℓ
- $\exists$ 自然数 N
- $\forall$ K_N の辺集合の 2 分割から作られる G_1, G_2：
- G_1 が K_k を含む $\vee$ G_2 が K_ℓ を含む

ラムゼー数の存在性：証明

証明は以下の再帰式に基づいた帰納法

ラムゼー数に対する再帰式

次の式が成立する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，$R(k, 1) = 1$
- 任意の $\ell \geq 1$ に対して，$R(1, \ell) = 1$
- 任意の $k, \ell > 1$ に対して，$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$

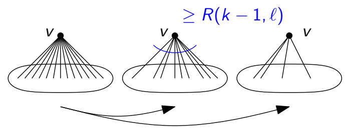
これが証明できれば，グラフに対するラムゼーの定理の証明になる

- $R(k, 1) = 1$ と $R(1, \ell) = 1$ は簡単．主題は最後の不等式

ラムゼー数に対する再帰式：証明 (1)

$N = R(k, \ell - 1) + R(k-1, \ell)$ とする

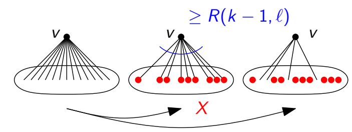
- K_N の頂点を 1 つ任意に選んで，v とする
- v に接続する辺は $N-1$ 個存在
- その中の $R(k-1, \ell)$ 個が G_1 に存在するか，または，
  その中の $R(k, \ell - 1)$ 個が G_2 に存在　　(補足：集合の 2 分割)



ラムゼー数に対する再帰式：証明 (2)

v に接続する辺の中の $R(k-1, \ell)$ 個が G_1 に存在するとき

- それらの辺に接続する v 以外の頂点の集合を X とする
- $|X| \geq R(k-1, \ell)$
- 帰納法の仮定から，X の頂点を見ると
  1. その中の $k-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる，または
  2. その中の ℓ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる



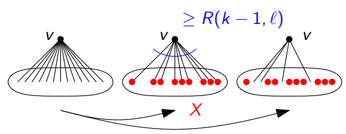
ラムゼー数に対する再帰式：証明 (3)

場合 1：X の中の $k-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる

- G_1 において，それら $k-1$ 個の頂点と v が K_k を作る

場合 2：X の中の ℓ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる

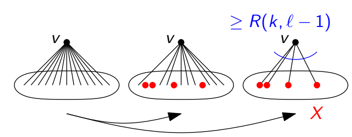
- G_2 において，それら ℓ 個の頂点が K_ℓ を作る



ラムゼー数に対する再帰式：証明 (4)

v に接続する辺の中の $R(k, \ell-1)$ 個が G_2 に存在するとき

- それらの辺に接続する v 以外の頂点の集合を X とする
- $|X| \geq R(k, \ell - 1)$
- 帰納法の仮定から，X の頂点を見ると
  1. その中の k 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる，または
  2. その中の $\ell - 1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる



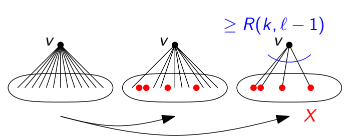
ラムゼー数に対する再帰式：証明 (5)

場合 1：X の中の k 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる

- G_1 において，それら k 個の頂点が K_k を作る

場合 2：X の中の $\ell - 1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる

- G_2 において，それら $\ell - 1$ 個の頂点と v が K_ℓ を作る　　□



ラムゼー数の上界

ラムゼー数に対する再帰式 (再掲)

次の式が成立する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，$R(k, 1) = 1$
- 任意の $\ell \geq 1$ に対して，$R(1, \ell) = 1$
- 任意の $k, \ell > 1$ に対して，$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell - 1)$

この式から次の上界が得られる (演習問題)

$$R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$$

ただし，$\binom{a}{b}$ とは二項係数 (組合せの総数，${}_a\mathrm{C}_b$ とも書く)

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \qquad (\text{ただし，} a \geq b)$$

ラムゼー数に対する上界の表

$\binom{k+\ell-2}{k-1}$ の表

$k \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	6	21	56	126	252	462
7	1	7	28	84	210	462	924

小さなラムゼー数の表

小さなラムゼー数の表

$k \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18	25	35–41	49–61
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143
6	1	6	18	35–41	58–87	102–165	113–298
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540

(Radziszowski '11 によるまとめ)

未解決問題

この表にあるギャップを埋めよ
($R(5, 5) = 43$ であると予想されている)

目次

1. ラムゼー理論とは？
2. グラフに対するラムゼー理論とは？
3. グラフに対するラムゼー数
4. **グラフに対する多色ラムゼー数**
5. ラムゼー理論の応用
6. 今日のまとめ

2 分割から r 分割へ

ここまでの話

K_N の辺集合を 2 分割して G_1, G_2 を作ったとき，...

ここからの話

K_N の辺集合を r 分割して $G_1, \dots, G_r$ を作ったとき，...

多色ラムゼー数

自然数 $k_1, \dots, k_r$

r 色ラムゼー数 $R(k_1, \dots, k_r)$ とは？

K_n の辺集合を r 個に分けてグラフ $G_1, \dots, G_r$ を任意に作ったとき

G_1 が K_{k_1} を含む　または　$\cdots$　または　G_r が K_{k_r} を含む

が成り立つような**最小**の n

多色ラムゼー数に対する上界

多色ラムゼー数に対する再帰式 (演習問題)

次の式が成立する

- $k_1, \dots, k_r$ の中のどれかが 1 のとき，$R(k_1, \dots, k_r) = 1$
- そうでないとき，

$$R(k_1, \dots, k_r) \leq 2 - r + \sum_{i=1}^{r} R(k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r)$$

多色ラムゼー数に対する上界

1 以上の任意の自然数 $k_1, \dots, k_r$ に対して

$$R(k_1, \dots, k_r) \leq \frac{(k_1 + \cdots + k_r - r)!}{(k_1 - 1)! \cdot \cdots \cdot (k_r - 1)!}$$

目次

1. ラムゼー理論とは？
2. グラフに対するラムゼー理論とは？
3. グラフに対するラムゼー数
4. グラフに対する多色ラムゼー数
5. **ラムゼー理論の応用**
6. 今日のまとめ

ラムゼー理論の応用

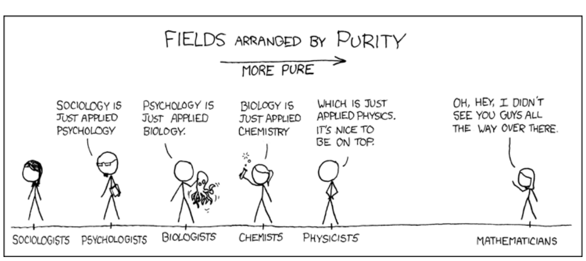
ラムゼー理論は数学的現象を探究するだけではなく，
広い応用を持つ

格言

「応用」と言うときには，
常に学問の階層性，社会の階層性，自然の階層性を念頭に置き，
応用の範囲を明確にする

ここでは，ラムゼー理論を別の理論へ応用する，という意味
(学問の中での応用)

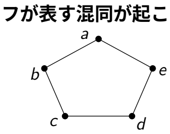
応用について



http://xkcd.com/435/

ゼロ誤り通信路容量 (1)

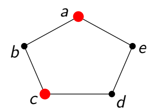
- アルファベット $\{a, b, c, d, e\}$ を持つ通信路を考える
- このとき，以下のグラフが表す混同が起こり得ると考える



- 混同がなければ，$\log_2 5 \approx 2.32$ ビット/伝送
- 混同があるので，これほど大きな容量は達成できない

ゼロ誤り通信路容量 (2)：グラフの独立集合

- a, c を使って符号化：$\log_2 2 = 1$ ビット/伝送
- a, c は混同されない



グラフの独立集合とは？

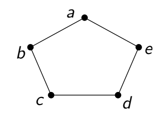
無向グラフ $G = (V, E)$ の独立集合とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，I の任意の 2 頂点間に G の辺が存在しないもの

グラフ G の**独立数** $\alpha(G)$ = G の独立集合の要素数の最大値

- $\{a, c\}$ は混同グラフの独立集合

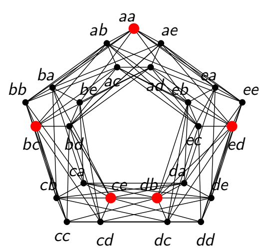
ゼロ誤り通信路容量 (3)：符号語長を 2 にすると

- aa, bc, ce, db, ed で符号化：$(\log_2 5)/2 \approx 1.16$ ビット/伝送
- これらは混同されない (なぜ？)



$\rightsquigarrow$ 符号語長が 2 の場合の混同グラフを描いてみる

ゼロ誤り通信路容量 (3)：符号語長が 2 の場合の混同グラフ



$\{aa, bc, ce, db, ed\}$ はこのグラフの独立集合

疑問

- もっと要素数の大きな独立集合はあるか？
- 混同グラフが別の形をしている場合はどうか？

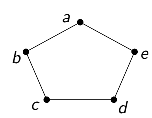
グラフの積

無向グラフ $G = (V_G, E_G)$, $H = (V_H, E_H)$

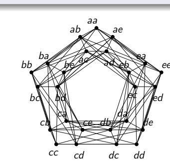
グラフの積とは？

G と H の積 $G \boxtimes H$ とは次のグラフ

- 頂点集合は $V_G \times V_H$ (直積)
- (u_1, v_1) と (u_2, v_2) の間に辺があるのは次のときのみ
  - $\{u_1, u_2\} \in E_G$ かつ $\{v_1, v_2\} \in E_H$
  - $u_1 = u_2$ かつ $\{v_1, v_2\} \in E_H$
  - $\{u_1, u_2\} \in E_G$ かつ $v_1 = v_2$



C_5



$C_5 \boxtimes C_5$

グラフの積の独立数とラムゼー数の関係

今から証明すること (Herdlin '66)

任意の無向グラフ G, H に対して

$$\alpha(G \boxtimes H) \leq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1) - 1$$

証明の前に，$G = C_5, H = C_5$ のとき，$\alpha(C_5) = 2$ なので

$$\alpha(C_5 \boxtimes C_5) \leq R(2 + 1, 2 + 1) - 1 = R(3, 3) - 1 = 6 - 1 = 5$$

つまり，先ほど見つけたものよりも大きな独立集合は存在しない

グラフの積の独立数とラムゼー数の関係：証明方針

今から証明すること (Herdlin '66)

任意の無向グラフ $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ に対して

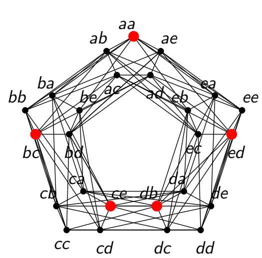
$$\alpha(G \boxtimes H) \leq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1) - 1$$

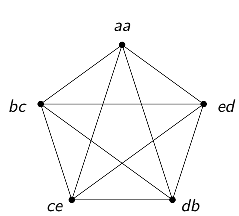
証明方針：$N = R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1)$ とする

- $\alpha(G \boxtimes H) \geq N$ と仮定して，矛盾を導く
- I を $G \boxtimes N$ の独立集合で，$|I| = N$ のものとする
- ここで，I を頂点集合とする完全グラフ K_N を考える
- ラムゼーの定理をうまく適用して矛盾を導く

グラフの積の独立数とラムゼー数の関係：証明 (1)

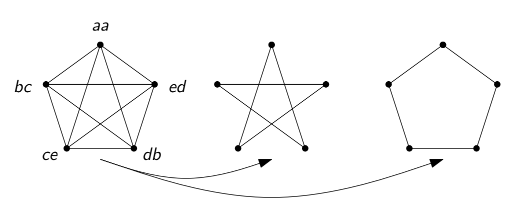
- I の 2 頂点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ に対して，以下のどちらかが成り立つ
  1. $u_1 \neq u_2$ かつ $\{u_1, u_2\} \notin E_G$
  2. $v_1 \neq v_2$ かつ $\{v_1, v_2\} \notin E_H$





グラフの積の独立数とラムゼー数の関係：証明 (2)

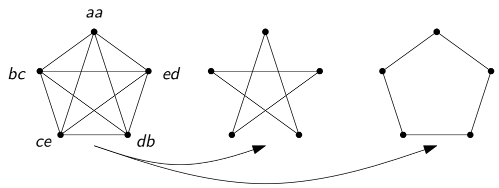
- I を頂点集合とする完全グラフ K_N を考える
- 辺 $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ を G_1, G_2 のどちらに入れるか以下で決める
  - 条件 1 を満たすとき，G_1 に入れる
  - そうでないとき，G_2 に入れる



⟨6⟩

グラフの積の独立数とラムゼー数の関係：証明 (3)

- ラムゼーの定理から次のどちらかが成り立つ
  - (A) G_1 に $K_{\alpha(G)+1}$ が含まれる
  - (B) G_2 に $K_{\alpha(H)+1}$ が含まれる
- (A) が成り立つときを考える ((B) のときも同様)
- この $K_{\alpha(G)+1}$ の 2 頂点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ を見てみると「$u_1 \neq u_2$ かつ $\{u_1, u_2\} \notin E_G$」を満たす
- つまり，G には頂点数 $\alpha(G) + 1$ の独立集合が存在することになる
- これは，$\alpha(G)$ の定義に矛盾 $\square$



さらなる疑問

符号語長を 2 よりも長くしたらどうなるか？

- 符号語長を 3 にしたとき考えるのは $\alpha(G \boxtimes G \boxtimes G)$
- $\rightsquigarrow$ レートは $(\log_2 \alpha(G \boxtimes G \boxtimes G))/3 = \log_2 \alpha(G \boxtimes G \boxtimes G)^{1/3}$
- 符号語長を k にしたときのレートは

$$\log_2 \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}})^{1/k}$$

次の値をグラフ G のシャノン容量と呼んでいる

$$\sup_{k \to \infty} \alpha(\underbrace{G \boxtimes \cdots \boxtimes G}_{k\text{ 個}})^{1/k}$$

シャノン容量の計算は難しい問題で，ほとんどの場合未解決

目次

概要

今日やったこと

ラムゼー理論の基礎概念を理解する

- ラムゼー理論とは何か？
- ラムゼー数
- ラムゼー理論の応用：ゼロ誤り通信路容量