数理解析 第 10 回
木

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 12 月 11 日

最終更新：2012 年 12 月 11 日　16:16

目次

概要

今日の目標

「木」を理解する
- 木の定義を理解する
- 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる
- グラフの全域木を理解する

証明技法
- 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

グラフにおける歩道

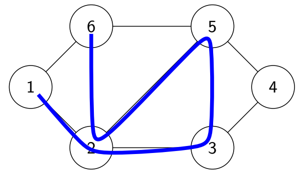
無向グラフ $G = (V, E)$，G の頂点 $u, v \in V$

u から v へ至る歩道とは？

G の頂点の列 $v_0, v_1, \ldots, v_k$ で次を満たすもの
- $v_0 = u$ かつ $v_k = v$
- 任意の $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ に対して，$\{v_i, v_{i+1}\} \in E$

歩道における辺数 k をその歩道の長さと呼ぶ

例：「$1, 2, 3, 5, 2, 6$」は歩道であるが，「$1, 2, 4, 5$」は歩道ではない



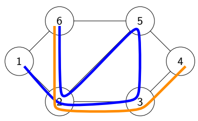
グラフにおける歩道：同値関係

無向グラフ $G = (V, E)$

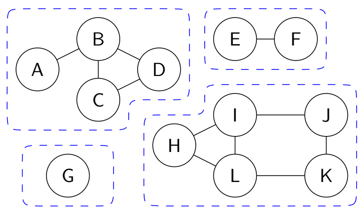
歩道の性質

1. 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v から v へ至る歩道が存在
2. 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，
   u から v へ至る歩道が存在 $\Rightarrow$ v から u へ至る歩道が存在
3. 任意の頂点 $u, v, w \in V$ に対して，
   u から v へ至る歩道が存在し，v から w へ至る歩道が存在
   $\Rightarrow$ u から w へ至る歩道が存在

つまり，「歩道が存在」という関係は V 上の同値関係



グラフにおける歩道：同値関係 (続)



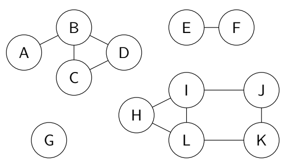
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

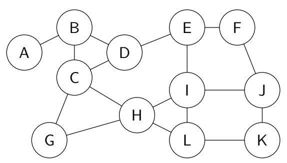
グラフが連結であるとは？

G が連結であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る歩道が存在すること

連結ではないグラフは非連結と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

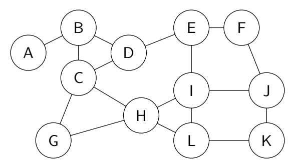
注：「グラフが連結している」とは言わない

誘導部分グラフ

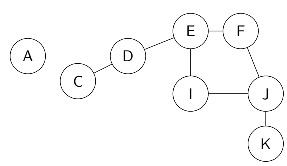
無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

誘導部分グラフとは？

G において U が誘導する部分グラフとは，次で定義されるグラフ
- 頂点集合は U
- 辺集合は $\{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$



G



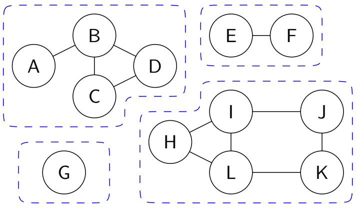
G の誘導部分グラフである

グラフの連結成分

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの連結成分とは？

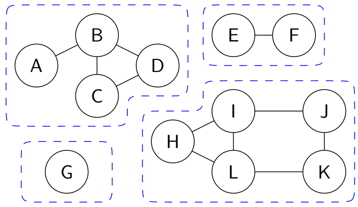
G の**連結成分**とは，「歩道が存在」という同値関係における同値類 $U \subseteq V$ に対して，U が誘導する G の部分グラフ



$\{A, B, C, D\}$, $\{E, F\}$, $\{G\}$, $\{H, I, J, K, L\}$ が連結成分を誘導する

グラフの孤立点

次数 0 の頂点を**孤立点**と呼ぶ



G は孤立点

グラフの切断辺

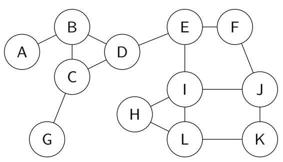
無向グラフ $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

グラフの切断辺とは？

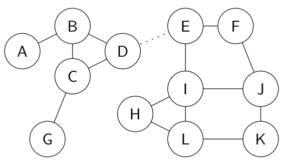
e が G の**切断辺**であるとは，
G から e を除去したグラフ $G - e$ に対して次が成り立つこと

$G - e$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

$\{D, E\}$ は G の切断辺



G



$G - \{D, E\}$

グラフの切断点

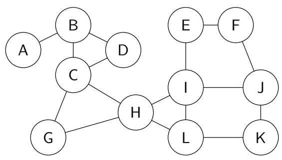
無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

グラフの切断点とは？

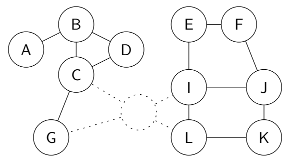
v が G の**切断点**であるとは，
G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

H は G の切断点　(「v を除去」とは，v と v に接続する辺すべてを除去すること)



G



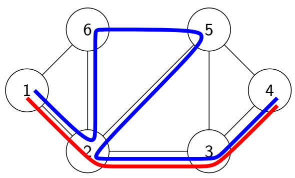
$G - \mathrm{H}$

最短歩道は道である

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $u, v \in V$

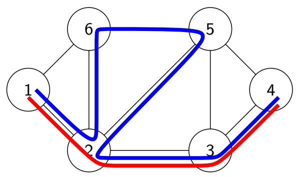
最短歩道は道である

u から v へ至る長さ最小の歩道は道である．



最短歩道は道である：証明の着想

証明の着想：同じ頂点を複数回通る歩道は短絡できる



- **青い歩道**：$1, 2, 6, 5, 2, 3, 4$
- **赤い歩道**：$1, 2, 3, 4$

なので，青い歩道は長さ最小の歩道ではない

最短歩道は道である：証明

証明：W を u から v へ至る長さ最小の歩道とする．

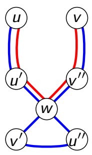
- 証明したいことは，W において複数回現れる頂点がないこと．
- **背理法**：頂点 w が W において複数回現れると仮定する．
- このとき，ある頂点 u', u'', v', v'' が存在して，W は

$$W = u, \ldots, u', w, v', \ldots, u'', w, v'', \ldots, v$$

  という頂点の列になっている．
- しかし，このとき

$$u, \ldots, u', w, v'', \ldots, v$$

  も u から v へ至る歩道であり，W より短い．
- これは W の長さが最小であることに**矛盾**．
- したがって，W には複数回現れる頂点がない． □



目次

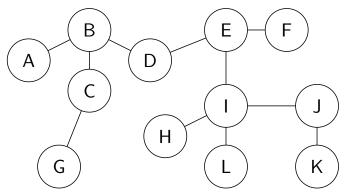
木

無向グラフ $G = (V, E)$

木とは？

G が木であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと

- G は連結である
- G は閉路を部分グラフとして含まない



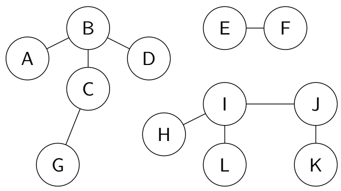
森

無向グラフ $G = (V, E)$

森とは？

G が森 (または林) であるとは，次の条件を満たすこと

- G は閉路を部分グラフとして含まない



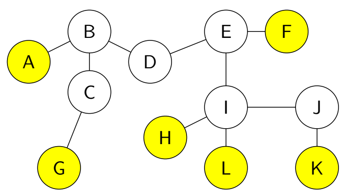
木は森であり，森の各連結成分は木である

木と葉

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

木は葉を持つ

G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在する

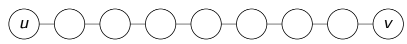


木における次数 1 の頂点を葉と呼ぶ

木は葉を持つ：証明 (1)

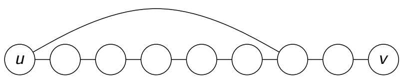
最大値論法に基づく．

- G に含まれる長さ最大の道を P とする．
- $|V| \geq 2$ なので，P の頂点数は 2 以上．
- P の端点を u, v とする．
  (このとき，P の頂点数が 2 以上であることから，$u \neq v$．)



木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法：u の次数が 2 以上であると仮定する．
- P が長さ最大の道であることから，G は閉路を含む．
- これは G が木であることに矛盾．
- したがって，u の次数は 1 である．
- 同様に，v の次数も 1 である． □

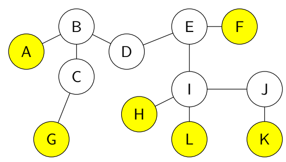


木における葉の役割

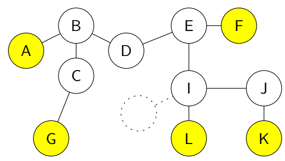
木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



G



$G - \mathrm{H}$

格言

仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

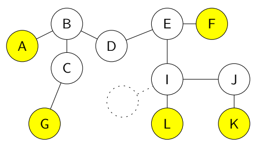
木から葉を除去しても木：証明の着想

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明の着想：定義に戻る



木であることの定義

- 連結である
- 閉路を含まない

- $G - v$ が閉路を含まないことは簡単に分かる
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w に対して，u から w に至る歩道が存在すればよい
- G において，u から w に至る歩道で，v を通らないものが存在すればよい

木から葉を除去しても木：証明 (1)

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明：$G - v$ が閉路を含まず，かつ，連結であることを示す．
[閉路を含まないこと]

- G は木なので，G は閉路を含まない
- $G - v$ は G の部分グラフはので，$G - v$ も閉路を含まない．

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

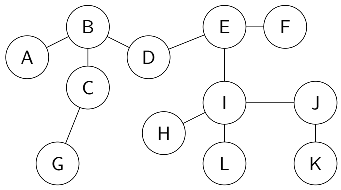
- G において，u から w に至る歩道で，v を通らないものが存在すればよい．
- G における u から w に至る歩道で，長さ最小のものを W とする．（示したいこと：W が v を通らないこと）
- 背理法：W が v を通ると仮定する．
- v は G の葉なので，G における v の隣接頂点を v' とすると，
$$W = u, \ldots, v', v, v', \ldots, w$$
と書ける．
- この列において v' と v が連続する箇所を取り除いた列
$$u, \ldots, v', \ldots, w$$
も G における u から w へ至る歩道であるが，W よりも短いので，W の最小性に矛盾．
- したがって，W は v を通らない． □

木の辺数

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$



$|V| = 12, \ |E| = 11$

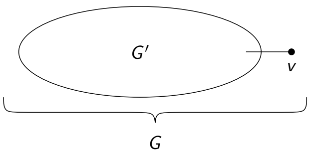
木の辺数：証明の着想

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$

証明：$|V|$ に関する帰納法



- $|V| \geq 2$ のとき，G には葉 v が存在
- $G' = G - v$ として帰納法の仮定を適用

木の辺数：証明

木 $G = (V, E)$

木の辺数

$$|E| = |V| - 1$$

証明：$|V|$ に関する帰納法

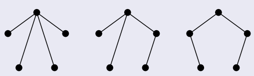
- $|V| = 1$ のとき，$|E| = 0$ なので成立．
- $k \geq 1$ として，$|V| = k$ のときに成り立つことを仮定する．
- $|V| = k + 1$ のときを考える．
- $|V| = k + 1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する．
- $G - v = (V', E')$ も木で，$|V'| = |V| - 1$ かつ $|E'| = |E| - 1$．
- 帰納法の仮定から，$|E'| = |V'| - 1$．
- したがって，$|E| = |V| - 1$． □

補足：グラフにおける帰納法

$|V| = k$ のときに成り立つことを仮定する，というのは
$|V| = k$ であるようなすべての場合に対して成り立つことを仮定する，
という意味

$|V| = 5$ のときに成り立つ，と仮定したら...

次の 3 つ木 $G = (V, E)$ について，$|E| = |V| - 1$ であることを仮定している

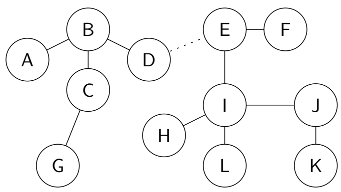


木においてどの辺も切断辺である

木 $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である



木においてどの辺も切断辺である：証明

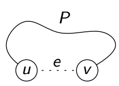
木 $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である

証明：$e = \{u, v\}$ とする．

- 背理法：e が切断辺でないと仮定する．
- e は切断辺でないので，$G - e$ は連結．
- $\therefore G - e$ には u から v へ至る道 P が存在．
（注：長さ最小の歩道は道）
- P と e を組み合わせると閉路が出現．
- G が閉路を含まないことに矛盾．
- したがって，e は切断辺である． □

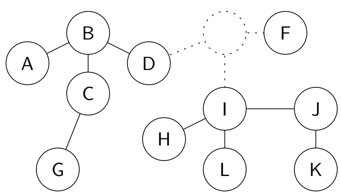


木において葉以外のどの頂点も切断点である

木 $G = (V, E)$，葉ではない頂点 $v \in V$

木において葉以外のどの頂点も切断点である

v は G の切断点である



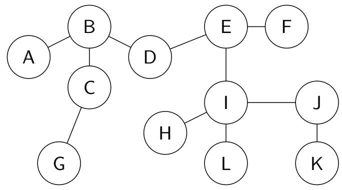
証明は演習問題

木と道

木 $G = (V, E)$，$u, v \in V$

木の 2 点間を結ぶ道はただ 1 つ

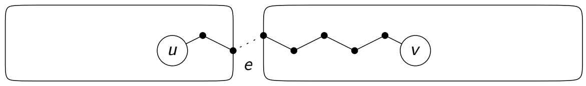
G において u と v を結ぶ道はただ 1 つ存在する



証明の着想：
- u, v を結ぶ道の上の辺はどれも切断辺であることに着目

木の 2 点間を結ぶ道はただ 1 つ：証明

証明：G は連結なので，u, v を結ぶ道が 1 つは存在する．
- それを P とする．
- e を P の任意の辺とする．
- e は G の切断辺であり，$G - e$ において，u と v は異なる連結成分に属する．
- したがって，G において u と v を結ぶ道はすべて e を通る．
- e は任意の辺なので，u と v を結ぶ道は P の辺をすべて通る．
- したがって，P 以外に u と v を結ぶ道は存在しない． □



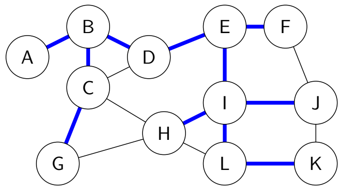
目次

グラフの全域木

無向グラフ $G = (V, E)$

全域木とは？

G の全域木とは，次を満たす G の部分グラフ G'
- G' は木 (連結で，閉路を含まない)
- G' の頂点集合は V



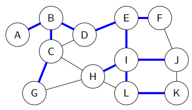
G が非連結であるとき，G の全域木は存在しない

連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$

連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在



証明の着想：G から辺をどんどん削除していく
- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる (?)

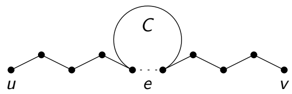
閉路から辺を除去しても連結

連結無向グラフ $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

補題 (閉路から辺を除去しても連結)

e が G の閉路に含まれる $\Rightarrow$ $G - e$ も連結

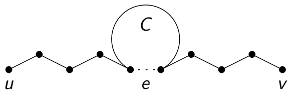
証明の着想：定義に戻る
- $G - e$ において，任意の 2 頂点 u, v の間に歩道が存在すればよい
- G は連結なので，G において u, v の間に歩道は存在
- それが e を通るときが問題



注：補題とは，定理の証明に用いる補助的な命題

閉路から辺を除去しても連結：証明

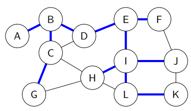
証明：任意の 2 頂点 u, v を考える．
- G は連結なので，G において u, v の間に歩道は存在する．
- それを W とする．
- W が e を通らないとき，W は $G - e$ における歩道である．
- W が e を通るとき，$C - e$ が e の端点間の歩道を作るので，それを使って，u, v 間の別の歩道を作れる．
- これは，e を通らないので，$G - e$ における歩道である．
- したがって，$G - e$ において u, v 間に歩道が存在する． □



証明したかったことに戻る

証明したかったこと：連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在



証明の着想：G から辺をどんどん削除していく
- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる!!!

連結グラフは全域木を含む：証明

証明：$|E|$ に関する帰納法．

- $|E| = 0$ のときは成立する．
- $|E| = k$ のときに成立すると仮定して，$|E| = k + 1$ のときに成立することを示す．
- G は連結であるので，G が閉路を含まなければ，G 自身が G の全域木である．
- G が閉路 C を含むと仮定する．
- C の辺 e を任意に選ぶ．
- 補題より，$G - e$ も連結である．
- 帰納法の仮定より，$G - e$ は全域木を含む．
- $G - e$ は G の部分グラフなので，この全域木は G の全域木でもある． □

補足：帰納法とアルゴリズム

- 「証明の着想」では，順に辺を取り除くというアルゴリズムを考えた．
- 実際の「証明」では，帰納法を使った．

格言

- 帰納法はアルゴリズム的な着想を証明に書き直すための技法
- 帰納法の証明を素直にたどるとアルゴリズムが得られる

有限の世界において「帰納法はアルゴリズムそのもの」という視点が大事

目次

今日のまとめ

今日の目標

「木」を理解する

- 木の定義を理解する
- 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる
- グラフの全域木を理解する

証明技法

- 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる