数理解析 第 8 回
グラフにおける次数

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 11 月 27 日

最終更新：2012 年 11 月 27 日　14:19

概要

目標

2 年前期「離散数学」の続編として**グラフ理論**を学び，
- 離散数学の基本的な考え方・態度を体得すること

なぜ講義で取り扱う？
- 離散数学はコンピュータ・サイエンスの基礎
- 「証明すること」に慣れる必要性 (論理的思考の訓練)
- 離散数学独特の論法の紹介

スケジュール 後半 (予定)

8	グラフにおける次数	(11/27)
9	グラフにおける極値問題	(12/4)
10	木	(12/11)
*	山本先生担当分の試験	(12/18)
*	振り替え休日のため休講	(12/25)
*	冬季休業	(1/1)
11	マッチング	(1/8)
12	二部グラフのマッチング	(1/15)
13	彩色	(1/22)
14	ラムゼー理論	(1/29)
*	期末試験	(2/12？)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員
- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2012/graphtheory/
- 注意：**資料の印刷等は各学生が自ら行う**
- 講義**前日**の 18:00 までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2012/graphtheory/
- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語一覧

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

授業の進め方

講義 (80 分)
- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (10 分)
- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分)
- 授業の感想などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)

オフィスアワー：水曜 2 限，金曜 2 限
- 質問など
- ただし，いないときもいるので注意 (Email でのアポイントを推奨)

演習問題

演習問題の進め方
- 授業の最後 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類
- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

解答の提出
- 演習問題の解答をレポートとして提出してもよい
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートは添削されて，返却される

評価

期末試験による
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 3 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 30 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
  - 科目全体の成績は山本先生担当分と総合して判定
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。
「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが，
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

教科書・参考書

教科書
- 指定しない

参考書

- R. J. ウィルソン (西関隆夫，西関裕子訳)，
  「グラフ理論入門 原書第 4 版」，近代科学社，2001．
- J. A. Bondy, U. S. R. Murty (立花俊一，奈良知恵，田澤新成訳)，
  「グラフ理論への入門」，共立出版，1991．
- N. ハーツフィールド，G. リンゲル (鈴木晋一訳)，
  「グラフ理論入門」，サイエンス社，1992．
- R. ディーステル (根上生也，太田克弘訳)，
  「グラフ理論」，シュプリンガー・フェアラーク東京，2000．

この講義の約束

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- 携帯電話は使わない
- 音を立てて睡眠しない

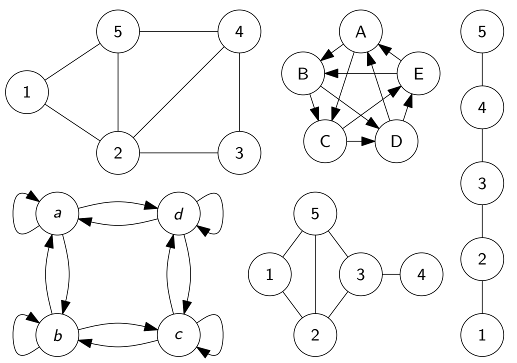
約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

概要

今日の目標
- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

グラフの例



有向グラフ

有向グラフとは？

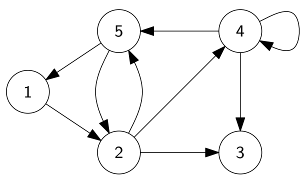
有向グラフとは，順序対 (V, A) で，
- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



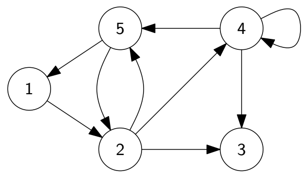
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- A の要素を G の**弧**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- A を G の**弧集合**と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその**始点**であり，v はその**終点**である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

無向グラフとは？

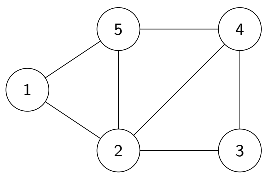
無向グラフとは，順序対 (V, E) で，
- V は集合
- $E \subseteq 2^V$ は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



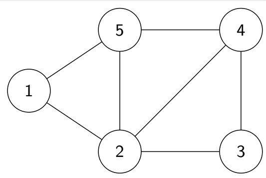
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

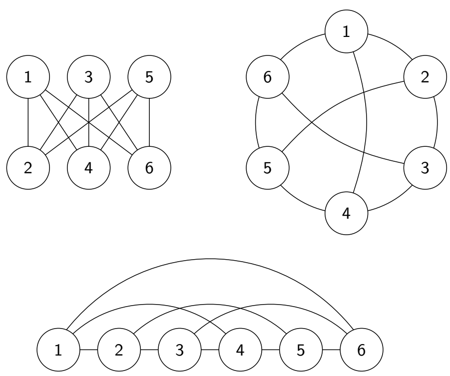
無向グラフの用語

- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- E の要素を G の**辺**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- E を G の**辺集合**と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその**端点**と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に**接続**するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は**隣接**するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示



目次

数え上げ

数え上げ (counting) とは？

数を計算すること

なぜ数え上げが重要なのか？

- 数を計算すること自体が目的である
- 数を計算することによって，他の目的を達成する
  - 離散数学においては「数え上げによる証明」

記法：有限集合の要素数

有限集合 A の要素数を $|A|$ と書く (これを A の**サイズ**とも呼ぶ)

例：$|\{1, 3, 4\}| = 3$，$|\emptyset| = 0$

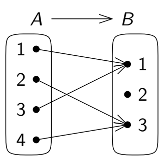
復習：全射

有限集合 A, B と関数 $f \colon A \to B$

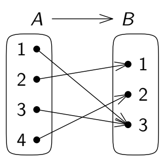
全射とは？

f が**全射**であるとは，次を満たすこと

$$\text{すべての } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



全射ではない



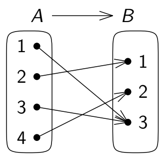
全射である

数え上げと全射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全射の性質

f が**全射** $\Rightarrow$ $|A| \geq |B|$



全射である

$A \backslash B$	1	2	3	
1			1	$= 1$
2	1			$= 1$
3			1	$= 1$
4		1		$= 1$
	≥ 1	≥ 1	≥ 1	

$|A| =$ **この行列の成分和** $\geq |B|$

「全射の性質」の証明

証明：f が全射であると仮定する．

- **行列 $M \in \mathbb{R}^{A \times B}$ を次のように定義する．**
  任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対して，
  $$M_{a,b} = \begin{cases} 1 & (f(a) = b \text{ のとき}), \\ 0 & (f(a) \neq b \text{ のとき}). \end{cases}$$
- **f が関数であることから，任意の $a \in A$ に対して**
  $\sum_{b \in B} M_{a,b} = |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1.$
- **また，f が全射であることから，任意の $b \in B$ に対して**
  $\sum_{a \in A} M_{a,b} = |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \geq 1.$
- **したがって**
  $$|A| = \sum_{a \in A} 1 = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} M_{a,b} = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A} M_{a,b} \geq \sum_{b \in B} 1 = |B|.$$
- **したがって，$|A| \geq |B|$ である．** □

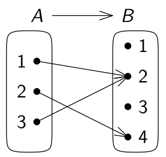
復習：単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

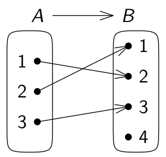
単射とは？

f が単射であるとは，次を満たすこと

すべての $a, a' \in A$ に対して， $a \neq a'$ ならば $f(a) \neq f(a')$



単射ではない



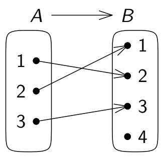
単射である

数え上げと単射

有限集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

単射の性質

f が**単射** $\Rightarrow$ $|A| \leq |B|$



単射である

$A \backslash B$	1	2	3	4	
1		1			$= 1$
2	1				$= 1$
3			1		$= 1$
	≤ 1	≤ 1	≤ 1	≤ 1	

$|A| =$ **この行列の成分和** $\leq |B|$

「単射の性質」の証明

証明：f が単射であると仮定する．

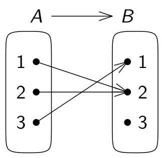
- **行列 $M \in \mathbb{R}^{A \times B}$ を次のように定義する．**
  任意の $a \in A$ と任意の $b \in B$ に対して，
  $$M_{a,b} = \begin{cases} 1 & (f(a) = b \text{ のとき}), \\ 0 & (f(a) \neq b \text{ のとき}). \end{cases}$$
- **f が関数であることから，任意の $a \in A$ に対して**
  $\sum_{b \in B} M_{a,b} = |\{b \in B \mid f(a) = b\}| = 1.$
- **また，f が単射であることから，任意の $b \in B$ に対して**
  $\sum_{a \in A} M_{a,b} = |\{a \in A \mid f(a) = b\}| \leq 1.$
- **したがって**
  $$|A| = \sum_{a \in A} 1 = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} M_{a,b} = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A} M_{a,b} \leq \sum_{b \in B} 1 = |B|.$$
- **したがって，$|A| \leq |B|$ である．** □

復習：全単射

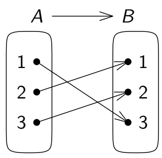
集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射とは？

f が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること



全単射ではない



全単射である

数え上げと全単射

集合 A, B と関数 $f\colon A \to B$

全単射の性質

f が**全単射** $\Rightarrow$ $|A| = |B|$

証明：演習問題

格言

「数え上げによる証明」の基礎は表を書くこと

目次

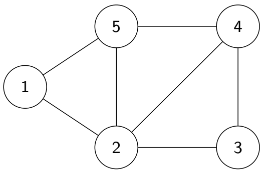
無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の次数とは？

頂点 $v \in V$ の**次数**とは，v に接続する辺の数のこと

$$\deg_G(v) = |\{e \in E \mid \exists\, u \in V\ (e = \{u, v\})\}|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

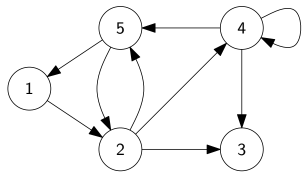
有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の入次数とは？

頂点 $v \in V$ の**入次数**とは，v を終点とする弧の数のこと

$$\deg^-_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (u, v))\}|$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

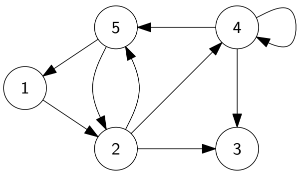
有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

頂点 v の出次数とは？

頂点 $v \in V$ の**出次数**とは，v を始点とする弧の数のこと

$$\deg^+_G(v) = |\{a \in A \mid \exists\, u \in V\ (a = (v, u))\}|$$



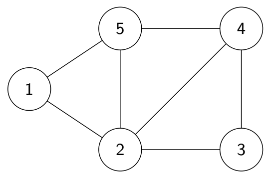
- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

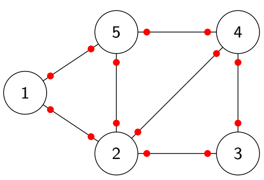
握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2 + 4 + 2 + 3 + 3 = 14$
- $|E| = 7$

握手補題の証明：準備 (直観)



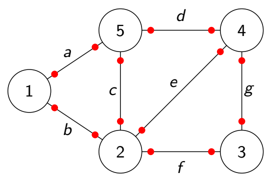
- G の各頂点の周りを見て，接続する辺の上に石を置く
- **石の総数を計算する**

数え方 1
- 頂点 v の周りの石の数 $= \deg_G(v)$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{v \in V} \deg_G(v)$

数え方 2
- 各辺 e の上の石の数 $= 2$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) =$ 石の総数 $= 2|E|$

握手補題の証明：準備 (行列)



$V \backslash E$	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$
	=2	=2	=2	=2	=2	=2	=2	

握手補題の証明

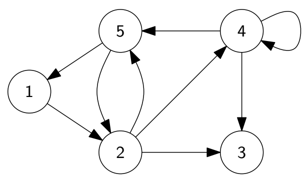
$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．
- 行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ を次のように定義する．任意の $v \in V$ と任意の $e \in E$ に対して，
$$M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}), \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点でないとき}). \end{cases}$$
- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を端点とする辺の数は $\deg_G(v)$ なので，$\sum_{e \in E} M_{v,e} = \deg_G(v)$.
- 任意の辺 $e \in E$ に対して，e の端点の数は 2 なので，$\sum_{v \in V} M_{v,e} = 2$.
- したがって
$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V} M_{v,e} = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$
- したがって，$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ である． $\square$

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg^+_G(v) = |A|$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg^-_G(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

証明：演習問題

無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

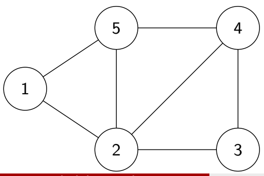
最大次数，最小次数とは？

G の**最大次数**とは，G の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小次数**とは，G の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 2$

有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

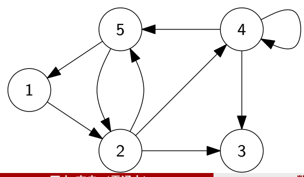
最大入次数，最小入次数とは？

G の**最大入次数**とは，G の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg_G^-(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小入次数**とは，G の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg_G^-(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G^-(1) = 1$
- $\deg_G^-(2) = 2$
- $\deg_G^-(3) = 2$
- $\deg_G^-(4) = 2$
- $\deg_G^-(5) = 2$

- $\Delta^-(G) = 2$
- $\delta^-(G) = 1$

有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

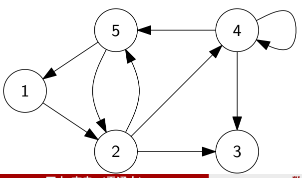
最大出次数，最小出次数とは？

G の**最大出次数**とは，G の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小出次数**とは，G の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg_G^+(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G^+(1) = 1$
- $\deg_G^+(2) = 3$
- $\deg_G^+(3) = 0$
- $\deg_G^+(4) = 3$
- $\deg_G^+(5) = 2$

- $\Delta^+(G) = 3$
- $\delta^+(G) = 0$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 「最小値 $\leq$ 平均値」なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$．
- 「平均値 $\leq$ 最大値」なので，$\frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$． □

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明：

1. v として最大次数を持つ頂点を考えればよい． □
2. v として最小次数を持つ頂点を考えればよい． □

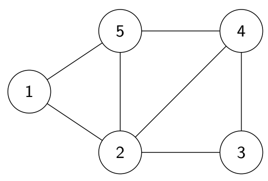
同じ次数を持つ頂点の存在性

無向グラフ $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$

同じ次数を持つ頂点の存在性

G には同じ次数を持つ頂点が 2 つは存在する

背理法で証明する



$\deg_G(\cdot)$

V	0	1	2	3	4	
1			1			$=1$
2					1	$=1$
3			1			$=1$
4				1		$=1$
5				1		$=1$
	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (1)

- G において次数 i の頂点の数を n_i と書き，$n = |V|$ とする．
- G の頂点の次数は 0 以上 $n-1$ 以下．
- よって，$\sum_{i=0}^{n-1} n_i = n$．
- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定する．
- ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_j = 0$ であると仮定すると，

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i = \sum_{i \neq j} n_i + n_j \leq \sum_{i \neq j} 1 + 0 = n - 1$$

となり，矛盾．
- したがって，すべての $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して $n_i = 1$ である．
- すなわち，G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在する．

同じ次数を持つ頂点の存在性：証明 (2)

ここまでの流れ

- 任意の $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_i \leq 1$ であると仮定したら，
- G には次数 0 の頂点 u と次数 $n-1$ の頂点 v が存在することが分かった．

- u は G のどの頂点とも隣接しない．
  - $\therefore \{u, v\} \notin E$．
- 一方，v は G のすべての頂点と隣接する．
  - $\therefore \{u, v\} \in E$．
- 「$\{u, v\} \notin E$」と「$\{u, v\} \in E$」は矛盾．
- したがって，ある $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対して，$n_j \geq 2$．
- すなわち，次数 j の頂点は 2 つ以上存在する． □

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる