数理解析 第 13 回
彩色

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 22 日

最終更新：2013 年 1 月 23 日　00:51

概要

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界
- 区間グラフの彩色

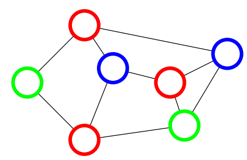
目次

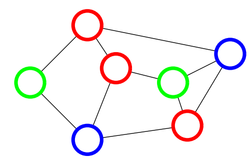
無向グラフの彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とは？ (直観的な定義)

G の**彩色** (さいしょく) とは，
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの





彩色である　　彩色ではない

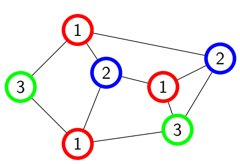
彩色において，同じ色を持つ頂点の集合を**彩色クラス**とも呼ぶ

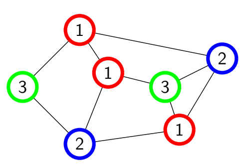
無向グラフの彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

彩色とは？ (形式的な定義)

G の **k 彩色**とは，写像 $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの





3 彩色である　　3 彩色ではない

c の終域 $\{1, \dots, k\}$ を**パレット**と呼ぶことがある

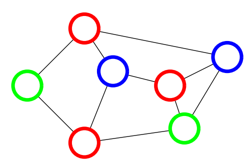
彩色可能性

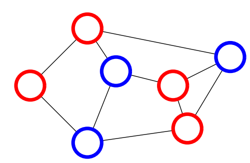
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

彩色可能性とは？

G が **k 彩色可能**であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である





3 彩色である　　2 彩色は存在しない

注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k + 1$ 彩色可能

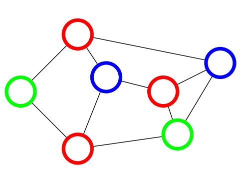
染色数

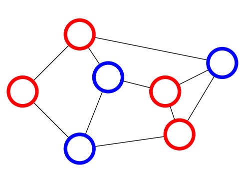
無向グラフ $G = (V, E)$

染色数とは？

G の**染色数**とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す





3 彩色である　　2 彩色は存在しない

$\therefore$ このグラフの染色数は 3

2 彩色可能性と二部グラフ

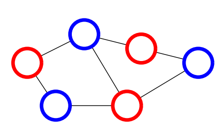
無向グラフ $G = (V, E)$

2 彩色可能性に対する必要十分条件

G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Rightarrow$」の証明：G は 2 彩色可能であるとする

- G の 2 彩色を 1 つ考え，その彩色クラスを A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を部集合とする二部グラフである



2 彩色可能性と二部グラフ (続)

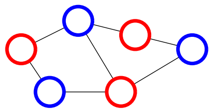
無向グラフ $G = (V, E)$

2 彩色可能性に対する必要十分条件

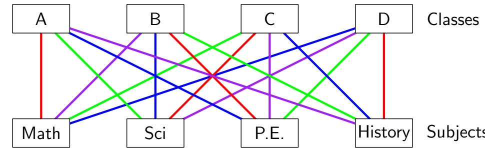
G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Leftarrow$」の証明：G は二部グラフであるとする

- G の部集合を A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を彩色クラスとする 2 彩色可能グラフである □

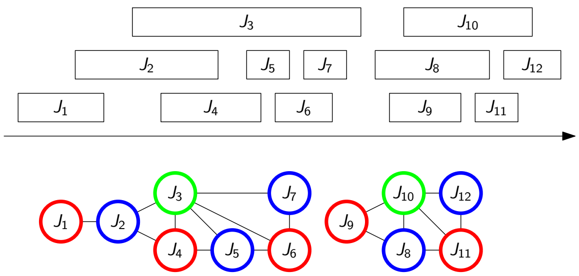


彩色が現れる場面 (1)：時間割作成



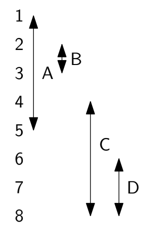
		A	B	C	D
■	1	Math	P.E.	Sci	History
■	2	Sci	History	Math	P.E.
■	3	P.E.	Sci	History	Math
■	4	History	Math	P.E.	Sci

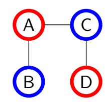
彩色が現れる場面 (2)：ジョブスケジューリング



彩色が現れる場面 (3)：レジスタ割当

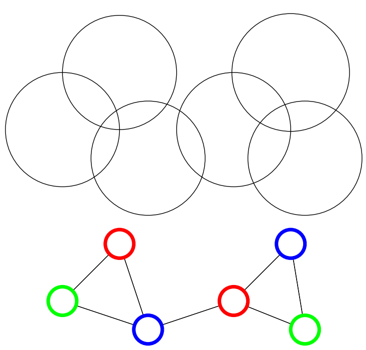
```
1: A = 2
2: B = 3
3: B = B + 2
4: C = A + 1
5: A = C + 3
6: D = 4
7: D = C + 2
8: C = 3
```






```
1: R1 = 2
2: R2 = 3
3: R2 = R2 + 2
4: R2 = R1 + 1
5: R1 = R2 + 3
6: R1 = 4
7: R1 = R2 + 2
8: R2 = 3
```


彩色が現れる場面 (4)：移動体通信における周波数割当

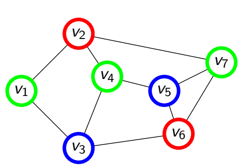


目次

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \dots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

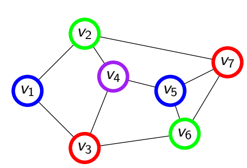


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \dots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例 (別の順序)



全順序 σ: v_7 v_5 v_6 v_3 v_1 v_2 v_4

貪欲彩色の性能評価

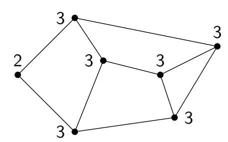
貪欲彩色が費やす色数の上界

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と V 上の任意の全順序 σ に対して，

$$\chi(G) \leq \begin{array}{l}\sigma \text{ に従う } G \text{ の貪欲} \\ \text{彩色が費やす色数}\end{array} \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ G の**最大次数** $\Delta(G)$ とは，その頂点の次数の最大値



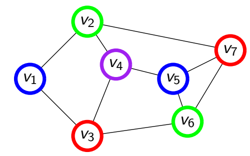
$\Delta(G) = 3$

貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$

- 任意の頂点 v に色を塗る瞬間を考える
- v の隣接頂点とは違う色を v に塗る
- v の隣接頂点に使われる色の数 $\leq \deg(v)$ (次数)
- $\therefore$ v を塗るために必要な色は $1, 2, \ldots, \deg(v) + 1$ の中にある
- $\therefore$ どの頂点も $1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1$ の中の色で塗れる

  ($\because \deg(v) \leq \Delta(G)$)
- よって，貪欲彩色は多くても $\Delta(G) + 1$ 色しか費やさない □



全順序 σ: $v_7\ v_5\ v_6\ v_3\ v_1\ v_2\ v_4$

貪欲彩色の柔軟性

観察

貪欲彩色の出力は全順序 σ に依存する

つまり，σ を変えると，異なる彩色が得られる (かもしれない)

事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば，貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり，染色数を計算するためには，うまい全順序を見つければよい

今からやること

- そのようなうまい全順序をどう見つけるか？
- その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？

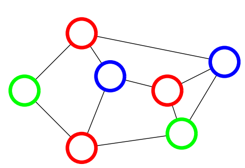
実は，いつもうまくいくとは限らないが，うまくいく場合を紹介する

目次

彩色の最適性

染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の**染色数**とは，G の k 彩色が存在するような最小の k



疑問

- 3 色未満で塗れないのか？
- 塗れないことをどう示すのか？

$\leftarrow \chi(G) \leq 3$ しか示してない

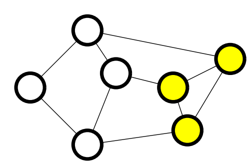
$\chi(G) = 3$???

クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G の**クリーク**とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G の**クリーク数**と呼ぶ)



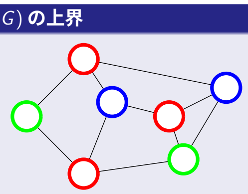
観察

- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？ $\rightsquigarrow$
C を塗るには $|C|$ 色必要

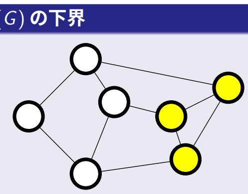
彩色が最適であることの確認法

$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた
$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた
$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

彩色が最適であることの確認法：まとめ

- k 色で塗る (つまり，$\chi(G) \leq k$)
- 頂点数 k のクリークを見つける (つまり，$\chi(G) \geq k$)
- したがって，$\chi(G) = k$

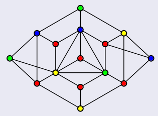
つまり，

彩色問題では，色を塗ることだけではなくて，
クリークを見つけることも重要になる

頂点数の大きなクリークが見つけられるとうれしい

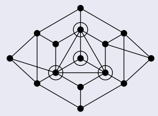
彩色の最適性の証明：例

$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた
$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 4 のクリークを見つけた
$\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 4$

染色数がうまく計算できそうな場合

任意の無向グラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

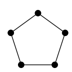
- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (1)

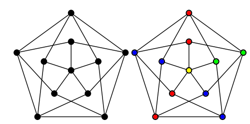
頂点数 5 の閉路 C_5



- $\chi(C_5) = 3$
- $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

Grötzsch グラフ



- $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

参考：$\chi(G)$ と $\omega(G)$ の差

定理 (Erdős)

任意の $k_1 > k_2$ に対して
$\chi(G) \geq k_1$ かつ $\omega(G) \leq k_2$ となるグラフ G が存在

例えば，頂点数 n の Erdős-Rényi ランダム・グラフを考えると，
高確率で

- $\chi(G) \sim \dfrac{n}{\log n}$
- $\omega(G) \sim \log n$

ここまでのまとめ と ここからの話

ここまでのまとめ

- $\chi(G) = \omega(G)$ となるようなグラフは重要そう
- しかし，どんな G に対してもこの等式が成り立つわけではない
- $\therefore$ どの G に対してこの等式が成り立つのか調べたい

どうして調べたいのか？

- この等式が成り立つとアルゴリズムを作りやすくなる

ここからの話

- その等式が成り立つ場合として「区間グラフ」

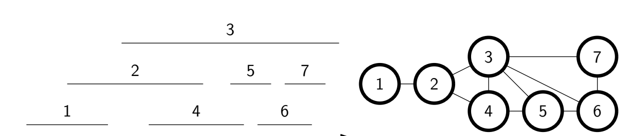
目次

ジョブスケジューリングと区間グラフ

定義：区間グラフ

区間グラフとは次のようにして構成できる無向グラフ G

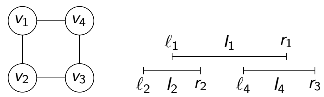
- G の各頂点は数直線上の閉区間に対応
- G の各辺は 2 つの交わる区間に対応



⟨4⟩

すべてのグラフが区間グラフであるわけではない

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)

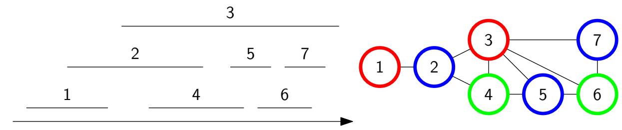


注

区間 $I_1 = [\ell_1, r_1]$ と $I_2 = [\ell_2, r_2]$ が交わる (ただし，$\ell_1 < \ell_2$) $\Leftrightarrow \ell_2 \leq r_1$

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



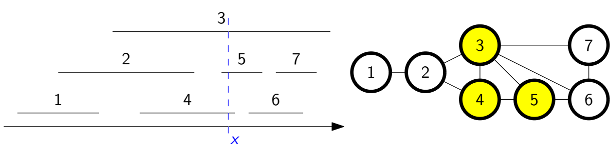
区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (1)

区間グラフと貪欲彩色

任意の区間グラフ G に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする

- 観察：数直線上の 1 点 x を含む区間はクリーク



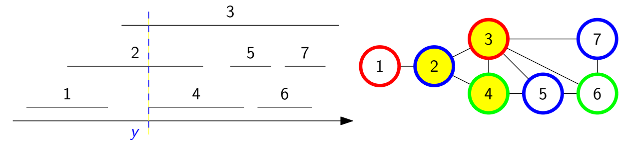
区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

区間グラフと貪欲彩色

任意の区間グラフ G に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする

- I を色 k で塗られた最初の頂点に対応する区間として，
  その左端を y とする
- y を含む区間の数 $\leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq k$



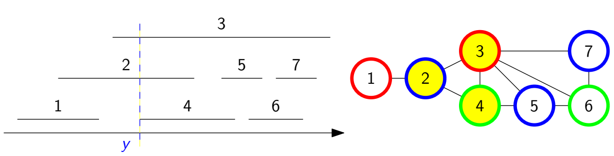
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

主張

y を含む区間の数 $= k$

主張の証明

- I と交わり，I の左端よりも左端が左にある区間に対応する頂点は
  $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ I に対応する頂点が貪欲彩色によって色 k で塗られた)
- それらは全部 y を含む
- $\therefore$ そのような区間の数 $= k - 1$
- $\therefore$ y を含む区間の数 $= k$ □



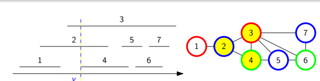
区間グラフと貪欲彩色：再考

性能解析 (2) までで分かること

- $\chi(G) \leq$ 貪欲彩色によって得られる色数
- $\omega(G) \geq y$ を含む区間の数
- つまり，
  y を含む区間の数 $\leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq$ 貪欲彩色によって得られる色数

性能解析 (3) で言っていること

- y を含む区間の数 $=$ 貪欲彩色によって得られる色数
- $\therefore \chi(G) = \omega(G)$



目次

1. グラフの彩色と染色数
2. 貪欲彩色
3. 染色数とクリーク数の弱双対性
4. 区間グラフの染色数とクリーク数
5. 今日のまとめ

今日のまとめ

今日やったこと

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界
- 区間グラフの彩色

数理解析 (13) **2012 年 1 月 22 日**

演習問題 **岡本 吉央**

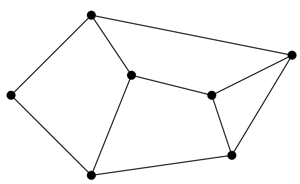
注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．用語・記法は講義で紹介したものに従う．

復習問題 13.1　無向グラフ G が 2 彩色可能であるための必要十分条件は，G が二部グラフであることである．これを証明せよ．

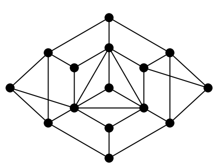
復習問題 13.2　任意の無向グラフ G に対して，その染色数 $\chi(G)$ と最大次数 $\Delta(G)$ が $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ という関係を満たすことを証明せよ．

復習問題 13.3　任意の無向グラフ G に対して，その染色数 $\chi(G)$ とクリーク数 $\omega(G)$ が $\omega(G) \leq \chi(G)$ という関係を満たすことを証明せよ．

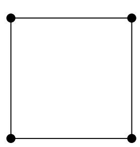
復習問題 13.4　次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



復習問題 13.5　次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



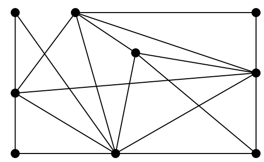
復習問題 13.6　次の無向グラフが区間グラフではないことを証明せよ．



復習問題 13.7　区間グラフ G において，その染色数 $\chi(G)$ とクリーク数 $\omega(G)$ が $\chi(G) = \omega(G)$ を満たすことを証明せよ．

補足問題 13.8　任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，頂点集合 V 上のある全順序が存在して，その全順序に従って貪欲彩色を行うと，色数最小の彩色が得られることを証明せよ．

追加問題 13.9　次の無向グラフにおいて，色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



追加問題 13.10　任意の自然数 $k \geq 2$ に対して，次の性質を持つ二部グラフ $G = (V, E)$ を構成せよ．性質：G の最大次数は k であり，V 上のある全順序 σ が存在して，それに従う貪欲彩色を行うと G の彩色として色数 $k+1$ のものが得られる．注意：k は 2 以上の**任意**の自然数であることに注意する．すなわち，k によって G は変わる．

追加問題 13.11　次のグラフが区間グラフではないことを証明せよ．