

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。用語・記法は講義で紹介したものに従う。

復習問題 14.1

1. $R(6, 6) \leq 3$ を証明せよ。
2. $R(6, 6) \geq 3$ を証明せよ。

復習問題 14.2 任意の自然数 $k, \ell > 1$ に対して

$$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$$

を証明せよ。

復習問題 14.3 無向グラフ G の独立数を $\alpha(G)$ で表すとき、

$$\alpha(G \boxtimes H) \leq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1) - 1$$

が任意の無向グラフ G, H に対して成り立つことを証明せよ。

補足問題 14.4 自然数 n, r と有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$ を考える。このとき、自然数 a_1, \dots, a_r が $n = a_1 + \dots + a_r - r + 1$ を満たすとき、 X の任意の r 分割 $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ に対して、ある $i \in \{1, \dots, r\}$ が存在して $|X_i| \geq a_i$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 14.5 任意の自然数 $k, \ell \geq 1$ に対して

$$R(k, \ell) \leq \binom{k + \ell - 2}{k - 1}$$

が成り立つことを証明せよ。

補足問題 14.6 任意の自然数 $r \geq 2$ と任意の自然数 $k_1, \dots, k_r > 1$ に対して

$$R(k_1, \dots, k_r) \leq 2 - r + \sum_{i=1}^r R(k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r)$$

が成り立つことを証明せよ。

追加問題 14.7

1. $R(3, 4) \leq 9$ を証明せよ。(ヒント:まず $R(3, 4) \leq 10$ を証明せよ。そして、 $R(3, 4) \geq 10$ であるとしたとき矛盾が生じることを示せ。握手補題を思い出してみよ。)
2. $R(3, 4) \geq 9$ を証明せよ。

追加問題 14.8 $R(3, 3, 3) \geq 8$ を証明せよ。