数理解析 (12) **2012 年 1 月 15 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．用語・記法は講義で紹介したものに従う．

復習問題 12.1 無向グラフ $G = (V, E)$ が二部グラフであるための必要十分条件は，G が長さ奇数の閉路を部分グラフとして持たないことである．これを証明せよ．

復習問題 12.2 二部グラフ $G = (V, E)$ を考える．ただし，V は部集合 A, B へ分割されるものとする．このとき，Hall の結婚定理は「G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つための必要十分条件は，任意の $S \subseteq A$ に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つことである」と主張している．以下の手順に従って，Hall の結婚定理を証明せよ．

1. 「G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つならば，任意の $S \subseteq A$ に対して $|S| \leq |N(S)|$ が成り立つ」を証明せよ．
2. その逆を以下の手順に沿って証明する．まず，G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持たないとする．辺部分集合 $M \subseteq E$ を G の最大マッチングであるとして，仮定より，A のある頂点 u で，M が飽和しないものが存在する．このとき，
$$S = \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ から始まるある交互} \\ \text{道が } a \text{ で終わる} \end{array} \right\},$$
$$T = \left\{ b \in B \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ から始まるある交互} \\ \text{道が } b \text{ で終わる} \end{array} \right\}$$
とする．以上の設定において，$|T| = |S| - 1$ が成り立つことを証明せよ．
3. 以上の設定において，$|N(S)| \leq |T|$ が成り立つことを証明せよ．これにより，$|N(S)| < |S|$ が結論され，Hall の定理の証明が終了する．

復習問題 12.3 Kőnig–Egerváry の定理は「任意の二部グラフ $G = (V, E)$ において，G のあるマッチング $M \subseteq E$ と G のある頂点被覆 $C \subseteq V$ が存在して，$|M| = |C|$ となる」ことを主張している．以下の手順にしたがって，Kőnig–Egerváry の定理を証明せよ．

1. グラフ G の部集合を A, B として，C を G の最小頂点被覆とする．行いたいことは，C を用いて，$|M| = |C|$ を満たす G のマッチング M を構成することである．頂点集合 $(A \cap C) \cup (B - C)$ が誘導する G の部分グラフを H' とする．このとき，H' が $A \cap C$ を飽和するマッチングを持つことを証明せよ．
2. 頂点集合 $(A - C) \cap (B \cap C)$ が誘導する G の部分グラフを H'' とする．このとき，H'' が $B \cap C$ を飽和するマッチングを持つことを証明せよ．
3. G が $|M| = |C|$ を満たすマッチング M を持つことを証明せよ．

復習問題 12.4 4×4 の盤面における四目並べでは，後手が必ず引き分けに持ち込めるような戦略が存在する．それを証明せよ．

追加問題 12.5 無向グラフ $G = (V, E)$ が二部グラフであるための必要十分条件は，G が長さ奇数の閉路を**誘導**部分グラフとして含まないことである．これを証明せよ．

追加問題 12.6 二部グラフ $G = (V, E)$ のすべての頂点の次数が同じであるとする．このとき，G は完全マッチングを持つことを証明せよ．

追加問題 12.7 二部グラフ $G = (V, E)$ の辺数を m とし，最大次数を $\Delta \geq 1$ とする．Kőnig–Egerváry の定理を用いて，G が辺数 m/Δ 以上のマッチングを持つことを証明せよ．