

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．用語・記法は講義で紹介したものに従う．

復習問題 10.1 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の頂点 $u, v \in V$ に対して, u から v へ至る長さ最小の歩道が道であることを証明せよ．

復習問題 10.2 任意の木 $G = (V, E)$ を考える．このとき, $|V| \geq 2$ ならば, G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在することを証明せよ．

復習問題 10.3 任意の木 $G = (V, E)$ (ただし, $|V| \geq 2$) とその葉 $v \in V$ を考える．このとき, $G - v$ も木であることを証明せよ．

復習問題 10.4 任意の木 $G = (V, E)$ に対して, $|E| = |V| - 1$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 10.5 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して, e が G の切断辺であることを証明せよ．

復習問題 10.6 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の頂点 $u, v \in V$ に対して, G において u と v を結ぶ道がただ 1 つ存在することを証明せよ．

復習問題 10.7 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ を考える．このとき, e が G の閉路に含まれるならば, $G - e$ も連結であることを証明せよ．

復習問題 10.8 任意の連結無向グラフにおいて, 全域木が存在することを証明せよ．

3. 任意の頂点 $u, v, w \in V$ に対して, u から v へ至る歩道が存在し, かつ, v から w へ至る歩道が存在するならば, u から w へ至る歩道が存在する．

補足問題 10.10 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の頂点 $v \in V$ を考える．頂点 v が G の葉ではないとき, v が G の切断点であることを証明せよ．(ヒント: v は G の葉ではないので, G において 2 つ以上隣接頂点を持つ．それらを u, w としたとき, $G - v$ に u から w へ至る道があると仮定すると何が起こるか?)

追加問題 10.11 連結無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| \geq |V|$ を満たすとする．このとき, G が閉路を含むことを証明せよ．

追加問題 10.12 連結無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| = |V| - 1$ を満たすならば, G は木であることを証明せよ．(ヒント: 握手補題と帰納法を用いる．証明すべきことが何であるのか, 注意せよ．)

補足問題 10.9 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して, 次を証明せよ．

1. 任意の頂点 $v \in V$ に対して, v から v へ至る歩道が存在する．
2. 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して, u から v へ至る歩道が存在するならば, v から u へ至る歩道が存在する．