

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．用語・記法は講義で紹介したものに従う．

復習問題 10.1 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  と任意の頂点  $u, v \in V$  に対して， $u$  から  $v$  へ至る長さ最小の歩道が道であることを証明せよ．

復習問題 10.2 任意の木  $G = (V, E)$  を考える．このとき， $|V| \geq 2$  ならば， $G$  には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在することを証明せよ．

復習問題 10.3 任意の木  $G = (V, E)$  (ただし， $|V| \geq 2$ ) とその葉  $v \in V$  を考える．このとき， $G - v$  も木であることを証明せよ．

復習問題 10.4 任意の木  $G = (V, E)$  に対して， $|E| = |V| - 1$  が成り立つことを証明せよ．

復習問題 10.5 任意の木  $G = (V, E)$  と任意の辺  $e \in E$  に対して， $e$  が  $G$  の切断辺であることを証明せよ．

復習問題 10.6 任意の木  $G = (V, E)$  と任意の頂点  $u, v \in V$  に対して， $G$  において  $u$  と  $v$  を結ぶ道がただ 1 つ存在することを証明せよ．

復習問題 10.7 任意の連結無向グラフ  $G = (V, E)$  と任意の辺  $e \in E$  を考える．このとき， $e$  が  $G$  の閉路に含まれるならば， $G - e$  も連結であることを証明せよ．

復習問題 10.8 任意の連結無向グラフにおいて，全域木が存在することを証明せよ．

3. 任意の頂点  $u, v, w \in V$  に対して， $u$  から  $v$  へ至る歩道が存在し，かつ， $v$  から  $w$  へ至る歩道が存在するならば， $u$  から  $w$  へ至る歩道が存在する．

補足問題 10.10 任意の木  $G = (V, E)$  と任意の頂点  $v \in V$  を考える．頂点  $v$  が  $G$  の葉ではないとき， $v$  が  $G$  の切断点であることを証明せよ．(ヒント： $v$  は  $G$  の葉ではないので， $G$  において 2 つ以上隣接頂点を持つ．それらを  $u, w$  としたとき， $G - v$  に  $u$  から  $w$  へ至る道があると仮定すると何が起こるか?)

追加問題 10.11 連結無向グラフ  $G = (V, E)$  が  $|E| \geq |V|$  を満たすとする．このとき， $G$  が閉路を含むことを証明せよ．

追加問題 10.12 連結無向グラフ  $G = (V, E)$  が  $|E| = |V| - 1$  を満たすならば， $G$  は木であることを証明せよ．(ヒント：握手補題と帰納法を用いる．証明すべきことが何であるのか，注意せよ．)

補足問題 10.9 任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  に対して，次を証明せよ．

1. 任意の頂点  $v \in V$  に対して， $v$  から  $v$  へ至る歩道が存在する．
2. 任意の頂点  $u, v \in V$  に対して， $u$  から  $v$  へ至る歩道が存在するならば， $v$  から  $u$  へ至る歩道が存在する．