

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．用語・記法は講義で紹介したものに従う．

復習問題 8.1 任意の有限集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$ を考える．このとき， f が全射ならば， $|A| \geq |B|$ となることを証明せよ．

復習問題 8.2 任意の有限集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$ を考える．このとき， f が単射ならば， $|A| \leq |B|$ となることを証明せよ．

復習問題 8.3 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.4 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 8.5 任意の無向グラフにおいて，同じ次数を持つ頂点が 2 つは存在することを証明せよ．

補足問題 8.6 任意の有限集合 A, B と関数 $f: A \rightarrow B$ を考える．このとき， f が全単射ならば， $|A| = |B|$ となることを証明せよ．

補足問題 8.7 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して，以下の 2 つが成り立つことを証明せよ．

1. $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|$.

2. $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$.

追加問題 8.8 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して，以下の 2 つが成り立つことを証明せよ．

1. $\delta^-(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^-(G)$.

2. $\delta^+(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^+(G)$.

追加問題 8.9

1. 頂点数 5 の無向グラフで，どの頂点の次数も 3 であるものは存在するか？ (理由も述べよ．)

2. 頂点数 6 の無向グラフで，どの頂点の次数も 3 であるものは存在するか？ (理由も述べよ．)

追加問題 8.10 頂点数 5 の有向グラフで，どの頂点の入次数も異なり，かつ，どの頂点の出次数も異なるようなものを 1 つ見つけよ． (頂点数が任意の自然数 $n \geq 2$ の場合はどうか?)

追加問題 8.11 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ (ただし， $|V| \geq 3$) と， G において隣接しない 2 頂点 $u, v \in V$ を考える (すなわち， $\{u, v\} \notin E$) . このとき， $\deg_G(u) \geq \frac{|V|-1}{2}$ かつ $\deg_G(v) \geq \frac{|V|-1}{2}$ ならば， u と v は共通の隣接頂点を持つこと，すなわち，ある $w \in V - \{u, v\}$ が存在して， $\{u, w\} \in E$ かつ $\{v, w\} \in E$ となることを証明せよ．