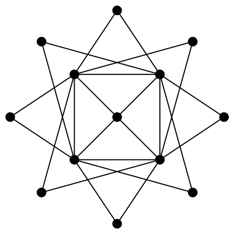
数理解析（後半） **2013 年 2 月 12 日**
期末試験 **岡本 吉央**

10:40〜12:10．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．記法は講義に従う．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

問題 1． 無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし，$k \geq 2$)．このとき，$\delta(G) \geq k-1$ ならば，G が頂点数 k の道を含むことを証明せよ．ただし，$\delta(G)$ は G の最小次数を表す．

問題 2． 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ．その彩色の色数が最小であることも証明せよ．



問題 3． 二部グラフ $G=(V,E)$ のすべての頂点の次数が同じであるとする．この次数が 1 以上であるとき，G が完全マッチングを持つことを証明せよ．

問題 4． 次の (A)，(B) のいずれかを選択して解答せよ．((A) と (B) の双方を解答している場合は，どちらも採点されない．)

(A) 任意の無向グラフ $G=(V,E)$ (ただし，$|V| \geq 3$) と，G において隣接しない 2 頂点 $u,v \in V$ を考える (すなわち，$\{u,v\} \notin E$)．このとき，$\deg_G(u) \geq \frac{|V|-1}{2}$ かつ $\deg_G(v) \geq \frac{|V|-1}{2}$ ならば，u と v は共通の隣接頂点を持つこと，すなわち，ある $w \in V - \{u,v\}$ が存在して，$\{u,w\} \in E$ かつ $\{v,w\} \in E$ となることを証明せよ．

(B) 任意の自然数 $k, \ell > 1$ に対して

$$R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$$

を証明せよ．ただし，$R(k,\ell)$ はラムゼー数を表す．

以上

採点が終了したら，授業のウェブページにて告知する．採点結果を知りたい場合は，その後で，岡本の居室 (西 4-206) まで問合せを．(メールや電話では答えられないので注意．)