

離散最適化基礎論 第 13 回
オークション理論

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 2 月 8 日

最終更新 : 2013 年 2 月 21 日 01:26

概要

目標

オークション理論に触れてみる

- ▶ 重要概念：耐戦略性
- ▶ 重要概念：第二価格オークション

目次

- ① 前回の復習から：Böhm-Bawerk の馬市場
- ② 単一財オークション
- ③ ダブルオークション
- ④ 今日のまとめ

Böhm-Bawerk の馬市場 (1)

売り手は馬を持っていて，買い手は馬を一頭買いたい

売り手	評価額	買い手	評価額
S_1	10	B_1	30
S_2	11	B_2	28
S_3	15	B_3	26
S_4	17	B_4	24
S_5	20	B_5	22
S_6	21	B_6	21
S_7	25	B_7	20
S_8	26	B_8	18
		B_9	17
		B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 0$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 10$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 15$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 20$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 25$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 30$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

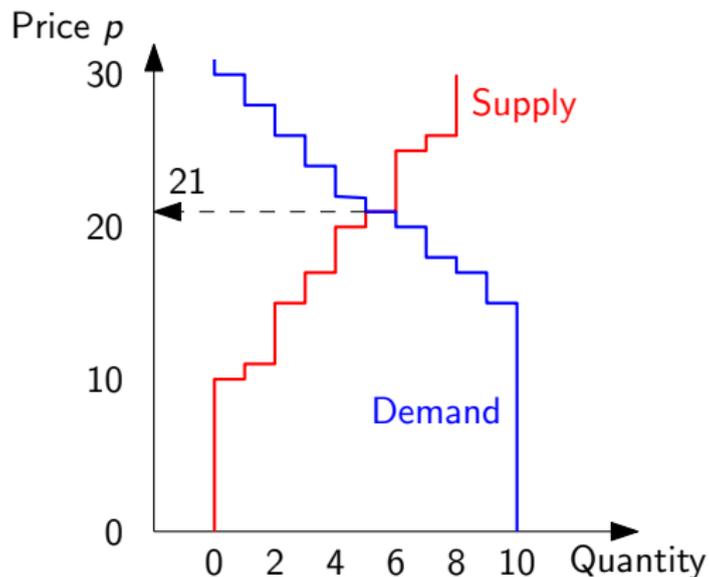
コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

	売り手	評価額	買い手	評価額	
$p = 35$	S_1	10	B_1	30	
	S_2	11	B_2	28	
	S_3	15	B_3	26	
	S_4	17	B_4	24	
	S_5	20	B_5	22	
	S_6	21	B_6	21	
	S_7	25	B_7	20	
	S_8	26	B_8	18	
				B_9	17
				B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で
売りたい

買い手は評価額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：需要曲線と供給曲線



取引価格 21 で、馬が 5~6 頭売買される

Böhm-Bawerk の馬市場 (4) : 評価額と申告額

他の人の評価額を誰も知らず, 価格は申告額から決められる

売り手	評価額	申告額	買い手	評価額	申告額
S_1	10	10	B_1	30	30
S_2	11	11	B_2	28	28
S_3	15	15	B_3	26	26
S_4	17	17	B_4	24	24
S_5	20	20	B_5	22	22
S_6	21	21	B_6	21	21
S_7	25	25	B_7	20	20
S_8	26	26	B_8	18	18
			B_9	17	17
			B_{10}	15	15

売り手は申告額以上の価格で
売りたい

買い手は申告額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：虚偽の申告

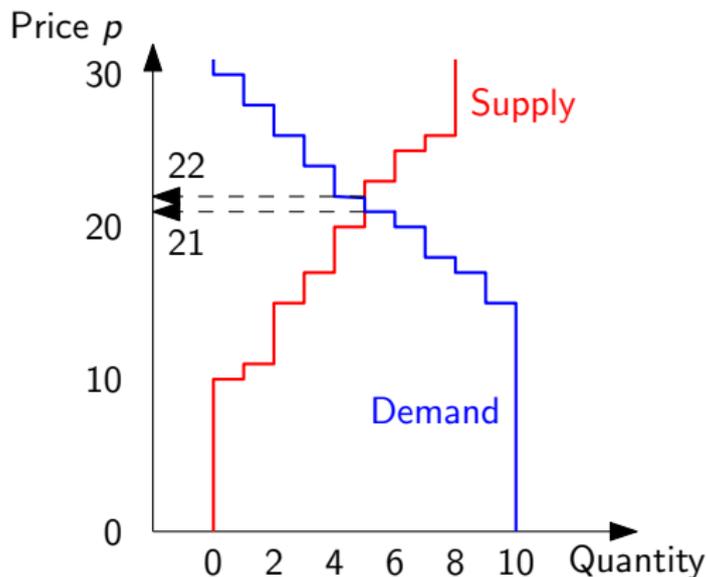
売り手や買い手は戦略的に虚偽の申告を行うかもしれない

売り手	評価額	申告額	買い手	評価額	申告額
S_1	10	10	B_1	30	30
S_2	11	11	B_2	28	28
S_3	15	15	B_3	26	26
S_4	17	17	B_4	24	24
S_5	20	20	B_5	22	22
S_6	21	23	B_6	21	21
S_7	25	25	B_7	20	20
S_8	26	26	B_8	18	18
			B_9	17	17
			B_{10}	15	15

売り手は申告額以上の価格で
売りたい

買い手は申告額以下の価格で
買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (6)：需要曲線と供給曲線 — 虚偽の申告の結果



取引価格 21 ~ 22 で，馬が 5 頭売買される
 (売り手が虚偽の申告を行い，取引価格が上がった)

ここからの話

- ▶ 売り手も買い手も虚偽の申告を行わないように「強制」できるか？
- ▶ 注意：売り手も買い手も，自分の利得を最大化しようとする

考え方

虚偽の申告を行っても得をしないように，**制度を設計する**

- ▶ 「**メカニズムデザイン**」と呼ばれる考え方

メカニズムデザインの応用の1つとして

- ▶ オークション
 - ▶ 単一財オークション
 - ▶ ダブルオークション

目次

- ① 前回の復習から : Böhm-Bawerk の馬市場
- ② 単一財オークション
- ③ ダブルオークション
- ④ 今日のまとめ

単一財封印入札オークション：設定

- ▶ 売り手 1 人 S_1 : 商品を 1 つ持っている
- ▶ 買い手 n 人 B_1, \dots, B_n : S_1 の持っている商品を買いたい
- ▶ 買い手 B_i は商品に対する評価額 $v_i \geq 0$ を持っている
(他の人は知らない)
- ▶ 買い手 B_i は商品に対する価値を S_1 に申告する \rightsquigarrow 申告額 b_i
(他の買い手は知らない)

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：考えなくてはならない問題

このとき、売り手 S_1 は次を決定する

- ▶ 勝者 (落札者)：どの買い手が商品を得るか？
- ▶ 価格：取引を行う価格をいくりにするか？

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：戦略

- ▶ 売り手 S_1 の戦略：どの買い手にいくらで売るかの選択
- ▶ 買い手 B_i の利得：申告額 b_i

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：利得

買い手 B_j が価格 p で落札したとする (ただし $p \leq b_j$)

- ▶ 売り手 S_1 の利得： p
- ▶ 買い手 B_i の利得
 - ▶ $i = j$ のとき (落札者のとき)： $v_j - p$
 - ▶ $i \neq j$ のとき (落札者ではないとき)：0

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：仮定

- ▶ 売り手がどのように勝者と価格を決めるのかを
買い手は全員知っている
- ▶ 売り手は買い手の評価額 v_1, \dots, v_n を知らない
ので
申告額 b_1, \dots, b_n のみから勝者と価格を決める

これは売り手 1 人と買い手 n 人，合計 $n + 1$ 人のプレイヤーがいるゲーム

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

売り手の利得を最大にする決め方は？

売り手が買い手全員の申告額を受け取る

- ▶ 例えば「適当に買い手を選んで、100万円払ってもらおう」と決める

買い手	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	28	100	-70
B_2	28	20	0	0
B_3	26	22	0	0
B_4	24	26	0	0
B_5	22	24	0	0
B_6	21	19	0	0
B_7	20	20	0	0
B_8	18	18	0	0

利得が負になるかもしれない

(そのようなオークションには誰も参加しない)

決め方が満たして欲しい性質：個人合理性

個人合理性

勝者 B_i の支払額 p は $p \leq b_i$ を満たす

B_i は b_i まで支払ってもよいと申告したのだから，
これは自然な性質

買い手	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	28	14	16
B_2	28	20	0	0
B_3	26	22	0	0
B_4	24	26	0	0
B_5	22	24	0	0
B_6	21	19	0	0
B_7	20	20	0	0
B_8	18	18	0	0

売り手の利得を最大にする決め方は？ take 2

売り手が買い手全員の申告額を受け取る

- ▶ 個人合理性：価格 p は勝者 B_i に対して $p \leq b_i$ を満たす
- ▶ つまり、 b_1, \dots, b_n の中の最大値を p とすればよい

記法： $b = (b_1, \dots, b_n)$ というベクトルの成分を大きい順に並べて、
 $b[1] \geq b[2] \geq \dots \geq b[n]$ と書く

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	28	2
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で、価格は $b[1] = 28$

第一価格オークション

第一価格オークション

b_1, \dots, b_n を受け取った売り手は次のように決める

- ▶ 勝者: $b_i = b[1]$ となる買い手 B_i
- ▶ 価格: $b[1]$

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	28	2
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で、価格は $b[1] = 28$

第一価格オークション：買い手はどう振る舞うのか？

- ▶ 買い手は低い申告額を言えば，安く買える
 - ▶ 申告額の「探り合い」がおこる

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	27	$b[1]$	27	3
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で，価格は $b[1] = 27 < 28$

決め方が満たしてほしい性質：上位落札性と耐戦略性

上位落札性

勝者は最高申告額を持つ買い手である
(勝者は $b_i = b[1]$ となる買い手 B_i である)

上位落札性が満たされれば，売り手の利得を大きくできる

耐戦略性

任意の買い手 B_i にとって，他の買い手の申告額が何であろうと
 B_i は自分の評価額 v_i を申告することが最適反応戦略

- ▶ 言い換えると，任意の $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n$ に対して

買い手の申告額が
 $b_1, \dots, b_{i-1}, v_i, b_{i+1}, \dots, b_n$
のときの B_i の利得

\geq

買い手の申告額が
 $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n$
のときの B_i の利得

耐戦略性が満たされれば，買い手が低い申告額を言う理由がなくなる

第一価格オークションの性質

- ▶ 第一価格オークションは個人合理性を満たす
- ▶ 第一価格オークションは上位落札性を満たす
- ▶ 第一価格オークションは耐戦略性を満たさない

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	27	$b[1]$	27	3
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

疑問

個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす決め方はあるのか？

第二価格オークション

第二価格オークション

b_1, \dots, b_n を受け取った売り手は次のように決める

- ▶ 勝者: $b_i = b[1]$ となる買い手 B_i
- ▶ 価格: $b[2]$ **ここが重要**

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	26	4
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で、価格は $b[2] = 26$

第二価格オークションの性質

- ▶ 第二価格オークションは個人合理性を満たす (すぐ分かる)
- ▶ 第二価格オークションは上位落札性を満たす (すぐ分かる)
- ▶ 第二価格オークションは耐戦略性を満たす (どうして?)

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	26	4
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (1)

- ▶ $b' = (b_1, \dots, b_{i-1}, v_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$ とする
- ▶ 任意の b_i に対して
 $b = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$ とする
- ▶ 2つの場合がある
 - ▶ 申告額が b' であるとき, B_i が勝者である
 - ▶ 申告額が b' であるとき, B_i が勝者ではない

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[1]$)	26	4	28 ($b[1]$)	26	4
B_2	28	20 ($b'[5]$)	0	0	20 ($b[5]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[4]$)	0	0	22 ($b[4]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[2]$)	0	0	26 ($b[2]$)	0	0
B_5	22	24 ($b'[3]$)	0	0	24 ($b[3]$)	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (2)

申告額が b' であるとき, B_i が勝者であるとする (つまり, $b'[1] = v_i$)

- ▶ B_i の利得 = $v_i - b'[2] \geq 0$

申告額が b であるとき,

- ▶ B_i が勝者であるならば, B_i の利得 = $v_i - b[2] = v_i - b'[2]$
- ▶ B_i が勝者でないならば, B_i の利得 = $0 \leq v_i - b'[2]$

つまり, B_i が申告額を v_i から b_i に変えても B_i の利得は増えない

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[1]$)	26	4	28 ($b[1]$)	26	4
B_2	28	20 ($b'[5]$)	0	0	20 ($b[5]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[4]$)	0	0	22 ($b[4]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[2]$)	0	0	26 ($b[2]$)	0	0
B_5	22	24 ($b'[3]$)	0	0	24 ($b[3]$)	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (2)

申告額が b' であるとき, B_i が勝者であるとする (つまり, $b'[1] = v_i$)

- ▶ B_i の利得 = $v_i - b'[2] \geq 0$

申告額が b であるとき,

- ▶ B_i が勝者であるならば, B_i の利得 = $v_i - b[2] = v_i - b'[2]$
- ▶ B_i が勝者でないならば, B_i の利得 = $0 \leq v_i - b'[2]$

つまり, B_i が申告額を v_i から b_i に変えても B_i の利得は増えない

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[1]$)	26	4	25 ($b[2]$)	0	0
B_2	28	20 ($b'[5]$)	0	0	20 ($b[5]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[4]$)	0	0	22 ($b[4]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[2]$)	0	0	26 ($b[1]$)	25	1
B_5	22	24 ($b'[3]$)	0	0	24 ($b[3]$)	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (3)

申告額が b' であるとき， B_i が勝者ではないとする（つまり， $b'[1] \geq v_i$ ）

- ▶ B_i の利得 = 0

申告額が b であるとき，

- ▶ B_i が勝者であるならば， $b[1] = b_i, b[2] = b'[1]$
 $\therefore B_i$ の利得 = $v_i - b[2] \leq b'[1] - b[2] = b'[1] - b'[1] = 0$
- ▶ B_i が勝者でないならば， B_i の利得 = 0

つまり， B_i が申告額を v_i から b_i に変えても B_i の利得は増えない □

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[2]$)	0	0	28 ($b[2]$)	0	0
B_2	28	32 ($b'[1]$)	30	-4	32 ($b[1]$)	28	0
B_3	26	22 ($b'[5]$)	0	0	22 ($b[5]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[3]$)	0	0	26 ($b[3]$)	0	0
B_5	22	24 ($b'[4]$)	0	0	24 ($b[4]$)	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (3)

申告額が b' であるとき， B_i が勝者ではないとする（つまり， $b'[1] \geq v_i$ ）

- ▶ B_i の利得 = 0

申告額が b であるとき，

- ▶ B_i が勝者であるならば， $b[1] = b_i, b[2] = b'[1]$
 $\therefore B_i$ の利得 = $v_i - b[2] \leq b'[1] - b[2] = b'[1] - b'[1] = 0$
- ▶ B_i が勝者でないならば， B_i の利得 = 0

つまり， B_i が申告額を v_i から b_i に変えても B_i の利得は増えない □

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[2]$)	0	0	34 ($b[1]$)	32	-2
B_2	28	32 ($b'[1]$)	30	-4	32 ($b[2]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[5]$)	0	0	22 ($b[5]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[3]$)	0	0	26 ($b[3]$)	0	0
B_5	22	24 ($b'[4]$)	0	0	24 ($b[4]$)	0	0

第一価格オークションと第二価格オークション：まとめ

第一価格オークション

決め方

- ▶ 勝者： $b_i = b[1]$ となる買い手 B_i ，価格： $b[1]$

性質

- ▶ 個人合理性，上位落札性を満たすが，耐戦略性を満たさない

第二価格オークション

決め方

- ▶ 勝者： $b_i = b[1]$ となる買い手 B_i ，価格： $b[2]$

性質

- ▶ 個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす

疑問

第二価格オークション以外に個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方はあるか？

第二価格オークションの持つ一意性

一意性

個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす決め方は第二価格オークション以外に存在しない

ここでは，**買い手が2人の場合**にこの一意性を証明する

- ▶ 買い手 B_1, B_2 の申告額が b_1, b_2 であり， $b_1 > b_2$ の場合を考える
- ▶ ($b_1 = b_2, b_1 < b_2$ の場合も同様に証明できる)

では，個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方に従って，勝者と価格 p を決定する

- ▶ 上位落札性より，勝者は B_1
- ▶ あとは価格 p が決まればよい

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26		
B_2	28	20		

第二価格オークションの持つ一意性

一意性

個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす決め方は第二価格オークション以外に存在しない

ここでは，**買い手が2人の場合**にこの一意性を証明する

- ▶ 買い手 B_1, B_2 の申告額が b_1, b_2 であり， $b_1 > b_2$ の場合を考える
- ▶ ($b_1 = b_2, b_1 < b_2$ の場合も同様に証明できる)

では，個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方に従って，勝者と価格 p を決定する

- ▶ 上位落札性より，勝者は B_1
- ▶ あとは価格 p が決まればよい

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$
B_2	28	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (1)

- ▶ B_1 が b'_1 を申告したときを考える (ただし, $b'_1 > b_2$)
- ▶ 依然, B_1 が勝者
- ▶ このときの価格を p' とする
- ▶ 成り立つこと: $p = p'$

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$
B_2	28	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (2)

 $p = p'$ の証明

- ▶ $p' > p$ だとすると,
 $v_1 = b'_1$ であるとき, b'_1 ではなく b_1 を申告すると利得が上がる
- ▶ これは耐戦略性に矛盾

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$	29	p'	$30 - p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0
	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	29	26	p	$29 - p$	29	p'	$29 - p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (3)

$p = p'$ の証明 (続き)

- ▶ $p' < p$ だとすると,
 - $v_1 = b_1$ であるとき, b_1 ではなく b'_1 を申告すると利得が上がる
- ▶ これは耐戦略性に矛盾

したがって, $p = p'$

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$	29	p'	$30 - p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0
	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	26	26	p	$26 - p$	29	p'	$26 - p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (4)

ここまでのまとめ

$b'_1 > b_1 \geq b_2$ ならば,

申告額が b_1, b_2 のときの価格 $p =$ 申告額が b'_1, b_2 のときの価格 p'

- ▶ 個人合理性より,

$$p = p' \leq b'_1$$

- ▶ つまり, $b'_1 > b_2$ を満たす任意の b'_1 に対して $p \leq b'_1$
- ▶ このとき「 $p \leq b_2$ 」となる
 - ▶ $p > b_2$ であるとする, $p > b'_1 > b_2$ を満たす b'_1 が存在してしまい $p \leq b'_1$ に矛盾

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	$p \leq 20$	$30 - p$
B_2	28	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (5)

示したいこと

$$p = b_2$$

では, $p < b_2$ であると仮定する

- ▶ $p < b_1'' < b_2$ を満たす b_1'' を考え, $v_1 = b_1''$ の場合を考える
- ▶ B_2 が b_2 を申告するとき,
 - ▶ B_1 が b_1'' を申告 \Rightarrow 勝者は B_2 で, B_1 の利得 = 0
 - ▶ B_1 が b_1 を申告 \Rightarrow 勝者は B_1 で, B_1 の利得 = $b_1'' - p > 0$
- ▶ これは耐戦略性に矛盾 □

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	18	12
B_2	28	20	0	0

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	19	26	18	1	19	0	0
B_2	28	20	0	0	20		

単一財封印入札オークション：まとめ

- ▶ 第一価格オークションは
個人合理性，上位落札性を満たすが，耐戦略性は満たさない
- ▶ 第二価格オークションは
個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす
- ▶ 逆に，個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方は
第二価格オークションだけ

補足

封印入札オークションではなく，公開型オークションを考えると

- ▶ 競り上げ式オークション ≡ 第二価格オークション
- ▶ 競り下げ式オークション ≡ 第一価格オークション

目次

- ① 前回の復習から : Böhm-Bawerk の馬市場
- ② 単一財オークション
- ③ **ダブルオークション**
- ④ 今日のまとめ

ダブルオークションとは？

売り手が持っている商品は全部同じで，売り手も入札を行う

売り手	評価額	申告額	買い手	評価額	申告額
S_1	10	10	B_1	30	30
S_2	11	11	B_2	28	28
S_3	15	15	B_3	26	26
S_4	17	17	B_4	24	24
S_5	20	20	B_5	22	22
S_6	21	21	B_6	21	21
S_7	25	25	B_7	20	20
S_8	26	26	B_8	18	18
			B_9	17	17
			B_{10}	15	15

取引の仲介者がオークション主催者

ダブルオークション：記法

- ▶ 売り手 S_1, \dots, S_m , 買い手 B_1, \dots, B_n
- ▶ 売り手 S_i の評価額 $v(S_i)$, 買い手 B_j の評価額 $v(B_j)$
- ▶ 売り手 S_i の申告額 $b(S_i)$, 買い手 B_j の申告額 $b(B_j)$

売り手	評価額	申告額	買い手	評価額	申告額
S_1	10	10	B_1	30	30
S_2	11	11	B_2	28	28
S_3	15	15	B_3	26	26
S_4	17	17	B_4	24	24

決め方が満たして欲しい性質

個人合理性

- ▶ 売り手 S_i が価格 p で売る $\Rightarrow p \geq b(S_i)$
- ▶ 買い手 B_j が価格 p で買う $\Rightarrow p \leq b(B_j)$

上位落札性

最終的に m 個の商品を持つのは
申告額の高かった上位 m 人のプレイヤー

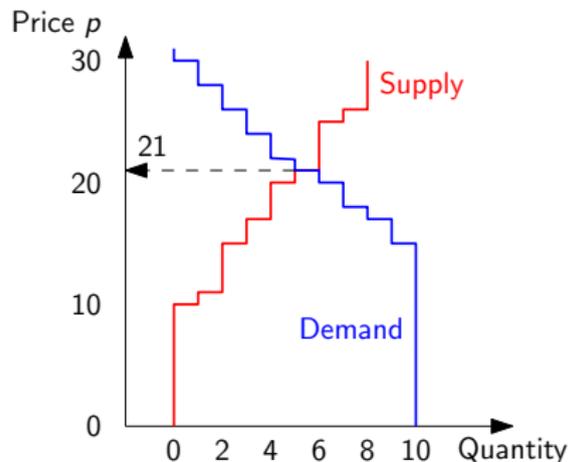
耐戦略性

任意のプレイヤーに対して、
他のプレイヤーがどのような申告額を持っていても、
そのプレイヤーは自分の評価額を申告額とすることが最適反応である

決め方が満たして欲しい性質：予算バランス

予算バランス

売り手の受け取る総額 = 買い手の支払う総額



Böhm-Bawerk の馬市場における
コアに基づく取引は
個人合理性，上位落札性，
予算バランスを満たすが，
耐戦略性は満たさない

疑問

これら 4 つの性質をすべて満たす決め方はあるか？

ダブルオークション：不可能性

不可能性

ダブルオークションに対して，個人合理性，上位落札性，耐戦略性，予算バランスをすべて満たす決め方は存在しない

今から，売り手1人 S ，買い手1人 B の場合に限って証明する

- ▶ これら4つの性質をすべて満たす決め方があると仮定して，そのような決め方を考える
(最終的に矛盾を導きたい(背理法))

いろいろな場合を考えていく

ダブルオークション：不可能性 証明 (1)

- ▶ $b(S) = 2, b(B) = 4 \Rightarrow$ 取引は行われる (\because 上位落札性)
 - ▶ S の受取額を $p_{2,4}$ とする
- ▶ $b(S) = 3, b(B) = 4 \Rightarrow$ 取引は行われる (\because 上位落札性)
 - ▶ S の受取額を $p_{3,4}$ とする

$v(S) = 3, v(B) = 4$ とする

- ▶ 耐戦略性より

$b(S) = 3, b(B) = 4$ のときの
 S の利得

\geq

$b(S) = 2, b(B) = 4$ のときの
 S の利得

$$p_{3,4} - 3 \geq p_{2,4} - 3$$

- ▶ $\therefore p_{3,4} \geq p_{2,4}$

ダブルオークション：不可能性 証明 (2)

$v(S) = 2, v(B) = 4$ とする

▶ 耐戦略性より

$$\boxed{b(S) = 3, b(B) = 4 \text{ のときの } S \text{ の利得}} \leq \boxed{b(S) = 2, b(B) = 4 \text{ のときの } S \text{ の利得}}$$

$$p_{3,4} - 2 \leq p_{2,4} - 2$$

▶ $\therefore p_{3,4} \leq p_{2,4}$

したがって，

▶ $p_{3,4} = p_{2,4}$

個人合理性より

▶ $p_{3,4} \geq 3$

したがって，

▶ $p_{2,4} \geq 3$

ダブルオークション：不可能性 証明 (3)

- ▶ $b(S) = 1, b(B) = 2 \Rightarrow$ 取引は行われる (\because 上位落札性)
 - ▶ B の支払額を $q_{1,2}$ とする, S の受取額を $p_{1,2}$ とする
- ▶ $b(S) = 1, b(B) = 4 \Rightarrow$ 取引は行われる (\because 上位落札性)
 - ▶ B の支払額を $q_{1,4}$ とする, S の受取額を $p_{1,4}$ とする

$v(S) = 1, v(B) = 4$ とする

- ▶ 耐戦略性より

$b(S) = 1, b(B) = 4$ のときの B の利得

 \geq

$b(S) = 1, b(B) = 2$ のときの B の利得

$$4 - q_{1,4} \geq 4 - q_{1,2}$$

- ▶ $\therefore q_{1,4} \leq q_{1,2}$

ダブルオークション：不可能性 証明 (4)

$v(S) = 1, v(B) = 2$ とする

▶ 耐戦略性より

$$\boxed{b(S) = 1, b(B) = 4 \text{ のときの } B \text{ の利得}} \leq \boxed{b(S) = 1, b(B) = 2 \text{ のときの } B \text{ の利得}}$$

$$2 - q_{1,4} \leq 2 - q_{1,2}$$

▶ $\therefore q_{1,2} \leq q_{1,4}$

したがって,

▶ $q_{1,2} = q_{1,4}$

個人合理性より

▶ $q_{1,2} \leq 2$

予算バランスより

▶ $p_{1,2} = q_{1,2}, p_{1,4} = q_{1,4}$

ダブルオークション：不可能性 証明 (5)

- ▶ ここまでのまとめ：得られた不等式

$$p_{1,4} = q_{1,4} = q_{1,2} \leq 2 < 3 \leq p_{2,4}$$

- ▶ すなわち， $p_{1,4} < p_{2,4}$

一方， $v(S) = 1, v(B) = 4$ とする

- ▶ 耐戦略性より

$b(S) = 1, b(B) = 4$ のときの
S の利得

\geq

$b(S) = 2, b(B) = 4$ のときの
S の利得

$$p_{1,4} - 1 \geq p_{2,4} - 1$$

- ▶ $\therefore p_{1,4} \geq p_{2,4}$
- ▶ これは $p_{1,4} < p_{2,4}$ に矛盾



ダブルオークション：どうするか？

不可能性 (再掲)

ダブルオークションに対して，個人合理性，上位落札性，耐戦略性，予算バランスをすべて満たす決め方は存在しない

そのため，これら 4 条件の中のどれか (1 つ，あるいは，複数) を諦める必要がある

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (1)

買い手の申告額を大きい順に並べて $\bar{b}[1], \bar{b}[2], \dots$ として
 売り手の申告額を小さい順に並べて $\underline{b}[1], \underline{b}[2], \dots$ として
 $\underline{b}[k] < \bar{b}[k]$ となる最大の k を k^* とする

売り手	評価額	申告額	受取額	買い手	評価額	申告額	支払額
S_1	10	10		B_1	30	30	
S_2	11	11		B_2	28	28	
S_3	15	15		B_3	26	26	
S_4	17	17		B_4	24	24	
S_5	20	20		B_5	22	22	
S_6	21	23		B_6	21	21	
S_7	25	25		B_7	20	20	
S_8	26	26		B_8	18	18	
				B_9	17	17	
				B_{10}	15	15	

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (2)

勝者： $k^* - 1$ 番目までの買い手と $k^* - 1$ 番目までの売り手

売り手	評価額	申告額	受取額	買い手	評価額	申告額	支払額
S_1	10	10		B_1	30	30	
S_2	11	11		B_2	28	28	
S_3	15	15		B_3	26	26	
S_4	17	17		B_4	24	24	
S_5	20	20		B_5	22	22	
S_6	21	23		B_6	21	21	
S_7	25	25		B_7	20	20	
S_8	26	26		B_8	18	18	
				B_9	17	17	
				B_{10}	15	15	

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (3)

価格：買い手は $\bar{b}[k]$ だけ支払い，売り手は $\underline{b}[k]$ だけ受け取る

売り手	評価額	申告額	受取額	買い手	評価額	申告額	支払額
S_1	10	10	20	B_1	30	30	22
S_2	11	11	20	B_2	28	28	22
S_3	15	15	20	B_3	26	26	22
S_4	17	17	20	B_4	24	24	22
S_5	20	20	0	B_5	22	22	0
S_6	21	23	0	B_6	21	21	0
S_7	25	25	0	B_7	20	20	0
S_8	26	26	0	B_8	18	18	0
				B_9	17	17	0
				B_{10}	15	15	0

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (4)

余りはオークション主催者の収益となる

売り手	評価額	申告額	受取額	買い手	評価額	申告額	支払額
S_1	10	10	20	B_1	30	30	22
S_2	11	11	20	B_2	28	28	22
S_3	15	15	20	B_3	26	26	22
S_4	17	17	20	B_4	24	24	22
S_5	20	20	0	B_5	22	22	0
S_6	21	23	0	B_6	21	21	0
S_7	25	25	0	B_7	20	20	0
S_8	26	26	0	B_8	18	18	0
				B_9	17	17	0
				B_{10}	15	15	0

オークション主催者の収益 $= 22 \times 4 - 20 \times 4 = 8$

目次

- ① 前回の復習から : Böhm-Bawerk の馬市場
- ② 単一財オークション
- ③ ダブルオークション
- ④ 今日のまとめ

今日やったこと

目標

オークション理論に触れてみる

- ▶ 重要概念：耐戦略性
- ▶ 重要概念：第二価格オークション

近年，オークション理論に関する和書が多数出版されている

- ▶ 坂井豊貴『マーケットデザイン入門』，ミネルヴァ書房，2010年．
- ▶ 横尾真『オークション理論の基礎』，東京電機大学出版局，2006年．
- ▶ ポール・ミルグロム（著），川又邦雄，奥野正寛（監訳），計盛英一郎，馬場弓子（訳）『オークション理論とデザイン』，東洋経済新報社，2007年．

もう1つ重要なこと

次のような記事が連載されている

- ▶ 横尾 真, 岩崎 敦, 櫻井 祐子, 岡本 吉央, 『計算機科学者のためのゲーム理論入門』, コンピュータソフトウェア, 2012-2013.

以下を扱っている

- ▶ 非協力ゲーム (2回)
- ▶ メカニズムデザイン (オークション含む, 2回)
- ▶ 協力ゲーム (1回)

期末試験

- ▶ 日時：2月15日(金) 14:40 ~ 16:10
- ▶ 場所：西 2-101
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を6題出題する
 - ▶ その中の4題は演習問題として提示されたものと同一である
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1題20点満点，計120点満点
- ▶ 成績において，100点以上は100点で打ち切り
- ▶ 持ち込み：A4用紙1枚分(裏表自筆書き込み)のみ可

目次

- ① 前回の復習から：Böhm-Bawerk の馬市場
- ② 単一財オークション
- ③ ダブルオークション
- ④ 今日のまとめ