離散最適化基礎論 第 12 回
特性関数形ゲームのコア：離散構造とアルゴリズム (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 2 月 1 日

最終更新：2013 年 2 月 1 日　18:08

概要

目標

特性関数形ゲームのコアにまつわる離散構造とアルゴリズムを見る

- 「割当ゲーム」を例として
- 重要項目：コアと線形計画問題の双対性との関連
- 重要項目：コアと取引価格の関係

目次

特性関数形ゲームの記述

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合
- 提携：N の部分集合のこと
- 特性関数 $v \colon 2^N \to \mathbb{R}$，$v(\emptyset) = 0$ を満たす

解釈

$v(S)$ は提携 S に属するプレイヤーが協力することで得られる利得和の最大値

特性関数形ゲームで考える問題

プレイヤーの間で協力が可能であるとき，

考える問題 1：提携形成問題

どのような提携が形成されるか？

考える問題 2：利得分配問題

提携の利得和がプレイヤーの間でどう分配されるか？

提携 N が形成されるとして，利得分配問題を主に考えていく

特性関数形ゲームのコア

特性関数形ゲーム (N, v)

コアとは？

(N, v) の**コア**とは，全体合理性，個人合理性，提携合理性を満たす利得ベクトル全体の集合

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ \text{任意の } S \subseteq N \text{ に対して } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \end{array} \right\}$$

- コアは特性関数形ゲームの解の 1 つであると考えられている (協力ゲームの解概念)
- コアは凸多面体 (有限個の線形不等式で記述されている)
- 優加法的ゲームでもコアは空かもしれない

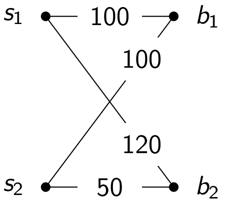
市場経済 (例)

2 人の売り手 s_1, s_2 ：商品を 1 つ持っている

- s_1 は 100 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得)
- s_2 は 150 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 150$ 円の利得)

2 人の買い手 b_1, b_2 ：商品を 1 つ欲しい

- b_1 は
  - s_1 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 250 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$250 - p$ 円の利得)
- b_2 は
  - s_1 の商品を 220 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)



考えたいこと

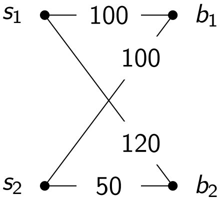
- 利得和を最大にする取引は？
- そのときの価格は？

市場経済 (例) 特性関数

プレイヤー集合 $N = \{s_1, s_2, b_1, b_2\}$

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{s_1\}) = 0$
- $v(\{s_2\}) = 0$
- $v(\{b_1\}) = 0$
- $v(\{b_2\}) = 0$
- $v(\{s_1, s_2\}) = 0$
- $v(\{s_1, b_1\}) = 100$
- $v(\{s_1, b_2\}) = 120$
- $v(\{s_2, b_1\}) = 100$
- $v(\{s_2, b_2\}) = 50$
- $v(\{b_1, b_2\}) = 0$

- $v(\{s_1, s_2, b_1\}) = 100$
- $v(\{s_1, s_2, b_2\}) = 120$
- $v(\{s_1, b_1, b_2\}) = 120$
- $v(\{s_2, b_1, b_2\}) = 100$
- $v(\{s_1, s_2, b_1, b_2\}) = 220$

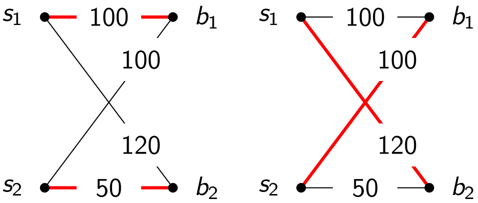


このような市場をモデル化した特性関数形ゲームが割当ゲーム

特性関数値の計算

$v(\{s_1, s_2, b_1, b_2\}) = 220$

- **取引の方法は 2 つある**



- **この中で利得和を最大にするのは右側の取引**

取引の方法 $\approx$ マッチング

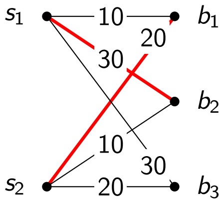
マッチングとは？ (直観的な定義)

- **各売り手が高々1 人の買い手と対応**
- **各買い手が高々1 人の売り手と対応**

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- **売り手の集合** $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$**，買い手の集合** $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **がいる**
- **売り手** s_i **と買い手** b_j **が取引したときの利得和** a_{ij} **が分かっている** ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **という行列だと見なす**)
- **このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい**



$$A = \begin{pmatrix} 10 & \color{red}{30} & 30 \\ \color{red}{20} & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 50$

全体の利得和の最大値 (最適値) $= 50$

割当問題を数理最適化問題として記述する (まとめ)

割当問題 (割当ゲームの特性関数値を与える数理計画問題)

a_{ij} は定数，x_{ij} は変数

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 & \text{for all } i \in \{1,\ldots,m\} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 & \text{for all } j \in \{1,\ldots,n\} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \text{for all } i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\}
\end{array}
$$

これは線形計画問題に似ているけれども**そうではない**

- 01 **整数線形計画問題**と呼ばれる

割当問題の線形計画緩和

割当問題の線形計画緩和 (R)

a_{ij} は定数，x_{ij} は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{for all } i \in \{1,\ldots,m\} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{for all } j \in \{1,\ldots,n\} \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad \text{for all } i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\}
\end{aligned}
$$

- これは線形計画問題
- 割当問題の最適値と (R) の最適値は一致する

何をやってきたのか？ そして 今日やることは？

前回，何をやったのか？

割当ゲーム：市場経済の問題のモデル (の 1 つ)

- 割当ゲームのコアを考えたい

割当問題：割当ゲームの特性関数値を計算する問題

- 01 整数線形計画問題として書けるが，その最適値は線形計画緩和と一致
- つまり，線形計画問題として書ける
- つまり，割当ゲームの特性関数値は効率良く計算できる

今日やることは？

- 割当ゲームのコアが常に非空であることを見る
- そのときに，線形計画問題と双対性が活躍する
- それを市場経済の枠組で捉え直す

目次

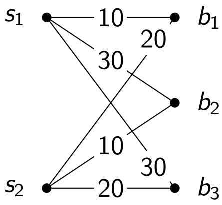
割当ゲームにおける利得ベクトル

売り手の集合 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$**，買い手の集合** $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

- **売り手** s_i **が得る利得を** $y_i \in \mathbb{R}$ **とする**
- **買い手** b_j **が得る利得を** $z_j \in \mathbb{R}$ **とする**

質問

ベクトル $(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ **がコアの要素であるための必要条件は？**



$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

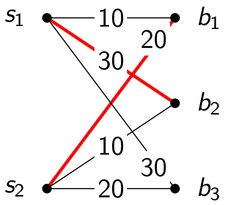
割当ゲームにおける利得ベクトル：全体合理性

最適な取引 (マッチング) を 1 つ固定して，
そのマッチングに置いて，売り手 s_i は買い手 $b_{\mu(i)}$ と取引を行うとする

全体合理性

$$\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j = v(\{s_1, \ldots, s_m, b_1, \ldots, b_n\}) = \text{(R) の最適値} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\mu(i)}$$

s_i **がどの買い手とも取引を行わない場合，**$\mu(i)$ **は定義されないが，**$a_{i,\mu(i)} = 0$ **とする**



$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

この場合，$\mu(2) = 3, \mu(3) = 1$

割当ゲームにおける利得ベクトル：個人合理性

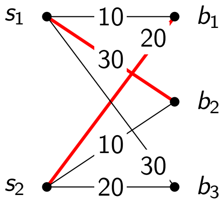
個人合理性

任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ **に対して**

$$y_i \geq 0$$

任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して**

$$z_j \geq 0$$



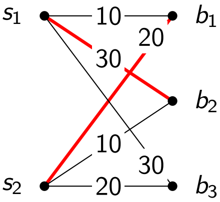
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

割当ゲームにおける利得ベクトル：部分的な提携合理性

売り手 1 人，買い手 1 人の提携に対する提携合理性

任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ と任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$y_i + z_j \geq a_{ij}$$



$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

割当ゲームにおける利得ベクトル：ここまでのまとめ

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素であるための必要条件

全体合理性

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{i,\mu(i)}$

個人合理性

- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して $y_i \geq 0$
- 任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $z_j \geq 0$

売り手 1 人，買い手 1 人の提携に対する提携合理性

- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ と $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $y_i + z_j \geq a_{ij}$

この 3 つの条件からいろいろなことが分かる

割当ゲームにおける利得ベクトル：提携合理性

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ が先ほどの 3 条件を満たすと仮定

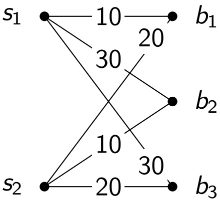
性質：提携合理性

このとき，任意の $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ **と任意の** $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ **に対して**

$$\sum_{i \in I} y_i + \sum_{j \in J} z_j \geq v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\})$$

例

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$



- $I = \{2\}, J = \{1, 2\}$ **のとき**
- $v(\{s_2, b_1, b_2\}) = 20$
- **このとき，提携合理性が成り立てば**

$$y_2 + z_1 + z_2 \geq 20$$

割当ゲームにおける利得ベクトル：提携合理性 (証明)

- $v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\})$ を与える取引で s_i が $b_{\mu'(i)}$ と取引を行うとする

$v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\})$

$\square$

割当ゲームにおける利得ベクトル：提携合理性 (証明)

- $v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\})$ を与える取引で s_i が $b_{\mu'(i)}$ と取引を行うとする

$$
\begin{aligned}
& v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\}) \\
&= \sum_{i \in I} a_{i,\mu'(i)} && (v \text{ の定義})
\end{aligned}
$$

□

割当ゲームにおける利得ベクトル：提携合理性 (証明)

- $v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\})$ を与える取引で s_i が $b_{\mu'(i)}$ と取引を行うとする

$$
\begin{aligned}
& v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\}) \\
&= \sum_{i \in I} a_{i,\mu'(i)} && (v \text{ の定義}) \\
&\leq \sum_{i \in I} (y_i + z_{\mu'(i)}) && (\text{売り手 1 人買い手 1 人に対する提携合理性})
\end{aligned}
$$

$\square$

割当ゲームにおける利得ベクトル：提携合理性 (証明)

- $v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\})$ を与える取引で s_i が $b_{\mu'(i)}$ と取引を行うとする

$$
\begin{aligned}
& v(\{s_i \mid i \in I\} \cup \{b_j \mid j \in J\}) \\
& = \sum_{i \in I} a_{i,\mu'(i)} && (v \text{ の定義}) \\
& \leq \sum_{i \in I} (y_i + z_{\mu'(i)}) && (\text{売り手 1 人買い手 1 人に対する提携合理性}) \\
& \leq \sum_{i \in I} y_i + \sum_{j \in J} z_j && (\text{個人合理性})
\end{aligned}
$$

□

割当ゲームにおける利得ベクトル：ここまでのまとめ

- $(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ がコアの要素であるならば次を満たす
  - 全体合理性
  - 個人合理性
  - 売り手 1 人買い手 1 人の提携に対する提携合理性
- 一方，性質 2 より
  この 3 条件を満たすならば，$(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ はコアの要素

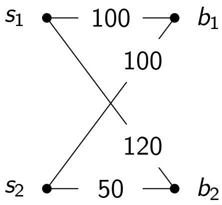
すなわち，次が分かった

割当ゲームのコア

$(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ が割当ゲームのコアの要素 $\Leftrightarrow$
$(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ が上の 3 条件を満たす

つまり，割当ゲームのコアは簡潔に記述できる

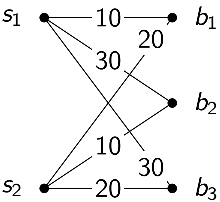
割当ゲームのコア：例 1



(y_1, y_2, z_1, z_2) **がコアの要素である** $\Leftrightarrow$

- $y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 220$
- $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$
- $z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0$
- $y_1 + z_1 \geq 100,\ y_1 + z_2 \geq 120$
- $y_2 + z_1 \geq 120,\ y_2 + z_2 \geq 50$

割当ゲームのコア：例 2



$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ がコアの要素である $\Leftrightarrow$

- $y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + z_3 = 50$
- $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$
- $z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0$
- $y_1 + z_1 \geq 10,\ y_1 + z_2 \geq 30,\ y_1 + z_3 \geq 30$
- $y_2 + z_1 \geq 20,\ y_2 + z_2 \geq 10,\ y_2 + z_3 \geq 20$

割当ゲームにおける利得ベクトル：ここからの話

割当ゲームのコア (再掲)

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ が割当ゲームのコアの要素 $\Leftrightarrow$
$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ が次の 3 条件を満たす

- 全体合理性
- 個人合理性
- 売り手 1 人買い手 1 人の提携に対する提携合理性

ここからの話

- この 3 条件を満たすベクトルは必ず存在するのか？ (コアは常に非空なのか？)
- コアの要素は簡単に見つけられるのか？

目次

割当問題の線形計画緩和

割当問題の線形計画緩和 (R)

a_{ij} **は定数，** x_{ij} **は変数**

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 & \text{for all } i \in \{1,\dots,m\} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 & \text{for all } j \in \{1,\dots,n\} \\
& x_{ij} \ge 0 & \text{for all } i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}
\end{array}
$$

- **これの双対問題を考えてみる**
  (式変形により，(R) の最適値の上界を与える)

(R) の双対問題：作り方

- $(x_1, \ldots, x_n)$ が (R) の許容解であるとして，$y_i, z_j \geq 0$ とする

(R) の双対問題：作り方

- $(x_1, \ldots, x_n)$ が (R) の許容解であるとして，$y_i, z_j \geq 0$ とする
- $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対応する第 1 制約の両辺に y_i を掛けて，$j \in \{1, \ldots, n\}$ に対応する第 2 制約の両辺に z_j を掛けて，和を取ると

$$
\begin{array}{rcll}
y_i \times \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & 1 \times y_i & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
z_j \times \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & \leq & 1 \times z_j & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \\
\hline
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_i + z_j) x_{ij} & \leq & \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j &
\end{array}
$$

(R) の双対問題：作り方

- $(x_1, \ldots, x_n)$ が (R) の許容解であるとして，$y_i, z_j \geq 0$ とする
- $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対応する第 1 制約の両辺に y_i を掛けて，
  $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対応する第 2 制約の両辺に z_j を掛けて，和を取ると

$$
\begin{array}{rcll}
y_i \times \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & 1 \times y_i & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
z_j \times \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} & \leq & 1 \times z_j & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \\
\hline
\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_i + z_j) x_{ij} & \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j &
\end{array}
$$

- 仮に，$y_i + z_j \geq a_{ij}$ とすると

$$
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_i + z_j) x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j
$$

(R) の双対問題：作り方

- $(x_1, \ldots, x_n)$ が (R) の許容解であるとして，$y_i, z_j \geq 0$ とする
- $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対応する第 1 制約の両辺に y_i を掛けて，
  $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対応する第 2 制約の両辺に z_j を掛けて，和を取ると

$$
\begin{array}{rcll}
y_i \times \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & \leq & 1 \times y_i & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
z_j \times \sum_{i=1}^{m} x_{ij} & \leq & 1 \times z_j & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \\
\hline
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_i + z_j) x_{ij} & \leq & \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j &
\end{array}
$$

- 仮に，$y_i + z_j \geq a_{ij}$ とすると

$$
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_i + z_j) x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j
$$

- この右辺をできるだけ小さくする y_i, z_j を見つけたい

(R) の双対問題

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
& y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
& z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

(R) の双対問題

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
& y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
& z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

事実：線形計画法の強双対定理

(R) と (D) が共に許容解を持つならば，

- (R) と (D) は共に最適解を持ち
- (R) の最適値 $=$ (D) の最適値

注：実際，(R) と (D) は共に許容解を持つ

双対問題とコア：次の 2 つはとても似ている気がする？

$(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ がコアの要素となるための必要十分条件

- $\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j =$ (R) の最適値
- 任意の $i \in \{1,\ldots,m\}$ に対して，$y_i \geq 0$
- 任意の $j \in \{1,\ldots,n\}$ に対して，$z_j \geq 0$
- 任意の $i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\}$ に対して，$y_i + z_j \geq a_{ij}$

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,n\} \\
& y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1,\ldots,m\} \\
& z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1,\ldots,n\}
\end{array}
$$

双対問題とコア：次の 2 つはとても似ている気がする？

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素となるための必要十分条件

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j = $ (R) の最適値
- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$y_i \geq 0$
- 任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$z_j \geq 0$
- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$y_i + z_j \geq a_{ij}$

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
& y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
& z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

双対問題とコア：次の 2 つはとても似ている気がする？

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素となるための必要十分条件

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j =$ (R) **の最適値**
- **任意の** $i \in \{1, \ldots, m\}$ **に対して，** $y_i \geq 0$
- **任意の** $j \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して，** $z_j \geq 0$
- **任意の** $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して，** $y_i + z_j \geq a_{ij}$

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
 & y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
 & z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

双対問題とコア：次の 2 つはとても似ている気がする？

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素となるための必要十分条件

- $\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j =$ (R) の最適値
- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$y_i \geq 0$
- 任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$z_j \geq 0$
- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$y_i + z_j \geq a_{ij}$

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
 & y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
 & z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

双対問題とコア：次の 2 つはとても似ている気がする？

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素となるための必要十分条件

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j$ = (R) の最適値
- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$y_i \geq 0$
- 任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$z_j \geq 0$
- 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$y_i + z_j \geq a_{ij}$

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
& y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
& z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

双対問題とコア：次の 2 つはとても似ている気がする？

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素となるための必要十分条件

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j$ = (R) **の最適値** = (D) **の最適値**
- **任意の** $i \in \{1, \ldots, m\}$ **に対して，** $y_i \geq 0$
- **任意の** $j \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して，** $z_j \geq 0$
- **任意の** $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$ **に対して，** $y_i + z_j \geq a_{ij}$

割当問題の線形計画緩和 (R) の双対問題 (D)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j & \\
\text{subject to} & y_i + z_j \geq a_{ij} & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \\
& y_i \geq 0 & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \\
& z_j \geq 0 & \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}
$$

双対問題とコア：コアの非空性

ここまでの話のまとめ

$(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n)$ が割当ゲームのコアの要素 $\Leftrightarrow$
$(y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_n)$ が (D) の最適解

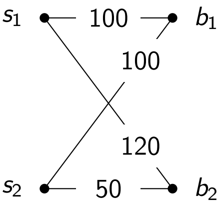
この「まとめ」から分かること

- 割当ゲームのコアは常に非空である
  ($\because$ (D) の最適解は常に存在するから)
- 割当ゲームのコアの要素を多項式時間で見つけられる
  ($\because$ (D) は線形計画問題だから)

よって，割当ゲームでは利得配分問題がコアに基づいて効率良く解ける

目次

割当ゲームのコア：例 1 (再掲)



(y_1, y_2, z_1, z_2) **がコアの要素である** $\Leftrightarrow$

- $y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 220$
- $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$
- $z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0$
- $y_1 + z_1 \geq 100,\ y_1 + z_2 \geq 120$
- $y_2 + z_1 \geq 120,\ y_2 + z_2 \geq 50$

割当ゲームにおける利得ベクトル：取引を行う 2 人

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素であると仮定

性質

利得和を最大にするマッチングで，売り手 s_i が買い手 $b_{\mu(i)}$ と取引を行う $\Rightarrow$

$$y_i + z_{\mu(i)} = a_{i,\mu(i)}$$

証明の流れ：

- 提携合理性から，$y_i + z_{\mu(i)} \geq a_{i,\mu(i)}$
- $y_i + z_{\mu(i)} > a_{i,\mu(i)}$ であると仮定すると

$$\sum_{i'=1}^{m} a_{i',\mu(i')} < \sum_{i'=1}^{m} y_{i'} + \sum_{j=1}^{n} z_j$$

となり，全体合理性に矛盾

割当ゲームにおける利得ベクトル：性質の証明

$$\sum_{i'=1}^{m} a_{i',\mu(i')}$$

割当ゲームにおける利得ベクトル：性質の証明

$$\sum_{i'=1}^{m} a_{i',\mu(i')}$$

$$= a_{i,\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} \qquad \text{(書き換え)}$$

割当ゲームにおける利得ベクトル：性質の証明

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i'=1}^{m} a_{i',\mu(i')} \\
&= a_{i,\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} && \text{(書き換え)} \\
&< y_i + z_{\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} && \text{(仮定)}
\end{aligned}
$$

割当ゲームにおける利得ベクトル：性質の証明

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i'=1}^{m} a_{i',\mu(i')} \\
&= a_{i,\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} && \text{(書き換え)} \\
&< y_i + z_{\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} && \text{(仮定)} \\
&\leq y_i + z_{\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} (y_{i'} + z_{\mu(i')})
\end{aligned}
$$

(提携合理性)

割当ゲームにおける利得ベクトル：性質の証明

$$\begin{aligned}
\sum_{i'=1}^{m} a_{i',\mu(i')} &= a_{i,\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} && \text{(書き換え)} \\
&< y_i + z_{\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} a_{i',\mu(i')} && \text{(仮定)} \\
&\leq y_i + z_{\mu(i)} + \sum_{i' \neq i} (y_{i'} + z_{\mu(i')}) && \text{(提携合理性)} \\
&\leq \sum_{i'=1}^{m} y_{i'} + \sum_{j=1}^{n} z_j && \text{(個人合理性)}
\end{aligned}$$

これで証明が完了 □

割当ゲームにおける利得ベクトル：取引を行う 2 人 — 意味合い

$(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ がコアの要素であると仮定

性質 (再掲)

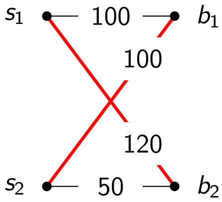
利得和を最大にするマッチングで，売り手 s_i が買い手 $b_{\mu(i)}$ と取引を行う $\Rightarrow$

$$y_i + z_{\mu(i)} = a_{i,\mu(i)}$$

つまり，

- 売り手 s_i と買い手 $b_{\mu(i)}$ が $a_{i,\mu(i)}$ という利得を分割する
- 誰とも取引しない売り手，買い手の利得は 0

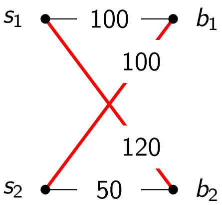
割当ゲームのコア：例 1 (再掲)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

- $y_1 + z_2 = 120$
  (s_1 と b_2 が利得 120 を分割する)
- $y_2 + z_1 = 100$
  (s_2 と b_1 が利得 100 を分割する)

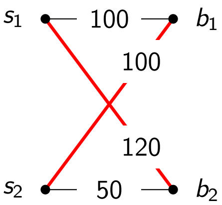
割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (1)



(y_1, y_2, z_1, z_2) **がコアの要素であるとき，**

- $y_1 + z_2 = 120$ (s_1 **と** b_2 **が利得** 120 **を分割**)
- $y_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ (**個人合理性**)

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (1)

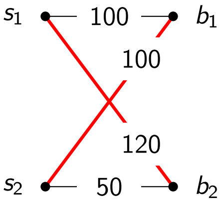


(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

- $y_1 + z_2 = 120$ (s_1 と b_2 が利得 120 を分割)
- $y_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ (個人合理性)

- s_1 は 100 円で入手した (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得) $\rightsquigarrow y_1 = p - 100$
- b_2 は s_1 の商品を 220 円以下で買いたい (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得) $\rightsquigarrow z_2 = 220 - p$

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (1)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

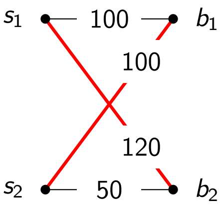
- $y_1 + z_2 = 120$
  (s_1 と b_2 が
  利得 120 を分割)
- $y_1 \geq 0, z_2 \geq 0$
  (個人合理性)

- s_1 は 100 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow$ $y_1 = p - 100$
- b_2 は s_1 の商品を 220 円以下で買いたい
  (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow$ $z_2 = 220 - p$

利得分配と価格 p

- $y_1 = 120,\ z_2 = 0$ のとき，$p = 220$

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (1)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

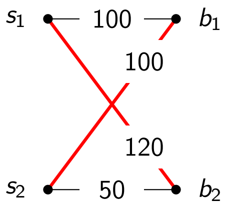
- $y_1 + z_2 = 120$
  (s_1 と b_2 が
  利得 120 を分割)
- $y_1 \geq 0, z_2 \geq 0$
  (個人合理性)

- s_1 は 100 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow y_1 = p - 100$
- b_2 は s_1 の商品を 220 円以下で買いたい
  (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow z_2 = 220 - p$

利得分配と価格 p

- $y_1 = 120,\ z_2 = 0$ のとき，$p = 220$
- $y_1 = 100,\ z_2 = 20$ のとき，$p = 200$

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (1)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

- $y_1 + z_2 = 120$ (s_1 と b_2 が利得 120 を分割)
- $y_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ (個人合理性)

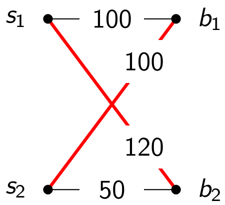
- s_1 は 100 円で入手した (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得) $\leadsto y_1 = p - 100$
- b_2 は s_1 の商品を 220 円以下で買いたい (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得) $\leadsto z_2 = 220 - p$

利得分配と価格 p

- $y_1 = 120,\ z_2 = 0$ のとき，$p = 220$
- $y_1 = 100,\ z_2 = 20$ のとき，$p = 200$
- $\cdots$
- $y_1 = 20,\ z_2 = 100$ のとき，$p = 120$
- $y_1 = 0,\ z_2 = 120$ のとき，$p = 100$

s_1 と b_2 の取引価格 p は $100 \leq p \leq 220$ を満たすどれか

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (2)



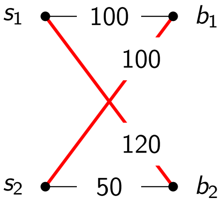
(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

- $y_2 + z_1 = 100$ (s_2 と b_1 が利得 100 を分割)
- $y_2 \geq 0, z_1 \geq 0$ (個人合理性)

- s_2 は 150 円で入手した (q 円で売れば，$q - 150$ 円の利得) $\rightsquigarrow y_2 = q - 150$
- b_1 は s_2 の商品を 250 円以下で買いたい (q 円で買えば，$250 - q$ 円の利得) $\rightsquigarrow z_1 = 250 - q$

利得分配と価格 q

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (2)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

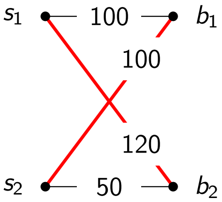
- $y_2 + z_1 = 100$ (s_2 と b_1 が 利得 100 を分割)
- $y_2 \geq 0, z_1 \geq 0$ (個人合理性)

- s_2 は 150 円で入手した (q 円で売れば，$q - 150$ 円の利得) $\rightsquigarrow y_2 = q - 150$
- b_1 は s_2 の商品を 250 円以下で買いたい (q 円で買えば，$250 - q$ 円の利得) $\rightsquigarrow z_1 = 250 - q$

利得分配と価格 q

- $y_2 = 100$, $z_1 = 0$ のとき，$q = 250$

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (2)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

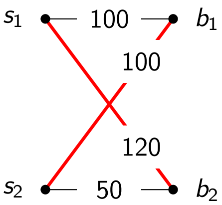
- $y_2 + z_1 = 100$
  (s_2 と b_1 が利得 100 を分割)
- $y_2 \geq 0, z_1 \geq 0$
  (個人合理性)

- s_2 は 150 円で入手した
  (q 円で売れば，$q - 150$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow y_2 = q - 150$
- b_1 は s_2 の商品を 250 円以下で買いたい
  (q 円で買えば，$250 - q$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow z_1 = 250 - q$

利得分配と価格 q

- $y_2 = 100, \ z_1 = 0$ のとき，$q = 250$
- $y_2 = 80, \ z_1 = 20$ のとき，$q = 230$

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 (2)



(y_1, y_2, z_1, z_2) がコアの要素であるとき，

- $y_2 + z_1 = 100$
  (s_2 と b_1 が利得 100 を分割)
- $y_2 \geq 0, z_1 \geq 0$
  (個人合理性)

- s_2 は 150 円で入手した
  (q 円で売れば，$q - 150$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow y_2 = q - 150$
- b_1 は s_2 の商品を 250 円以下で買いたい
  (q 円で買えば，$250 - q$ 円の利得)
  $\rightsquigarrow z_1 = 250 - q$

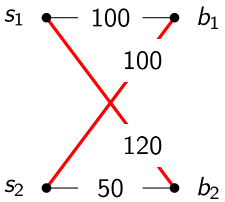
利得分配と価格 q

- $y_2 = 100$, $z_1 = 0$ のとき，$q = 250$
- $y_2 = 80$, $z_1 = 20$ のとき，$q = 230$
- $\cdots$
- $y_2 = 20$, $z_1 = 80$ のとき，$q = 130$
- $y_2 = 0$, $z_1 = 100$ のとき，$q = 150$

s_2 と b_1 の取引価格 q は
$150 \leq q \leq 250$ を満たすどれか

割当ゲームのコア：例 1 — 価格 注意

取引価格が先程の不等式を満たしても
(y_1, y_2, z_1, z_2) **がコアの要素であるとは限らない**



- s_1 **と** b_2 **の取引価格** p **は**
  $100 \leq p \leq 220$ **を満たすどれか**
  $\rightsquigarrow p = 100$ **としてみる**
- s_2 **と** b_1 **の取引価格** q **は**
  $150 \leq q \leq 250$ **を満たすどれか**
  $\rightsquigarrow q = 250$ **としてみる**

$p = 100,\ q = 250$ **に対応する利得ベクトル**

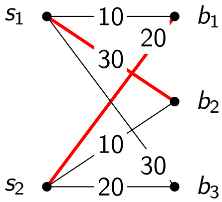
- $y_1 = p - 100 = 0$
- $y_2 = q - 150 = 100$
- $z_1 = 250 - q = 0$
- $z_2 = 220 - p = 120$

これは提携合理性

$$y_1 + z_1 \geq 100$$

を満たさない

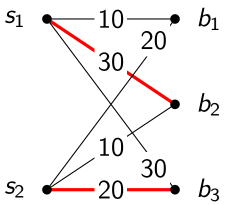
割当ゲームのコア：例 2 (再掲)



$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ がコアの要素であるとき，

- $y_1 + z_2 = 30$
  (s_1 と b_2 が利得 30 を分割する)
- $y_2 + z_1 = 20$
  (s_2 と b_1 が利得 20 を分割する)
- $z_3 = 0$
  (b_3 は利得を得ない)

割当ゲームのコア：例 2 — 他の最適なマッチング



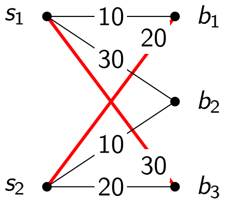
$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ がコアの要素であるとき，

- $y_1 + z_2 = 30$
  (s_1 と b_2 が利得 30 を分割する)
- $y_2 + z_3 = 20$
  (s_2 と b_3 が利得 20 を分割する)
- $z_1 = 0$
  (b_1 は利得を得ない)

先程の式と組み合わせると

- $y_2 = 20$

割当ゲームのコア：例 2 — 他の最適なマッチング (2)



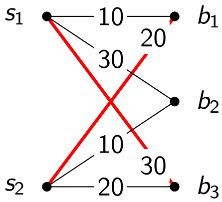
$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ がコアの要素であるとき，

- $y_1 + z_3 = 30$
  (s_1 と b_3 が利得 30 を分割する)
- $y_2 + z_1 = 20$
  (s_2 と b_1 が利得 20 を分割する)
- $z_2 = 0$
  (b_2 は利得を得ない)

先程の式と組み合わせると

- $y_1 = 30$

割当ゲームのコア：例 2 — まとめ



$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$ **がコアの要素であるとき，**

- $y_1 = 30,\ y_2 = 20$
- $z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 0$

どのマッチングが実際に達成されるかにこれは依存しない

Böhm-Bawerk の馬市場 (1)

売り手は馬を持っていて，買い手は馬を一頭買いたい

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：割当問題の係数行列

$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10}
\end{array}
\\
\begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：割当問題の最適解

$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

最大利得和 $= 57$

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：割当問題の最適解

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\
\hline
s_1 & 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
s_2 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
s_3 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
s_4 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
s_5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_6 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_8 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

最大利得和 $= 57$，**それを達成するマッチングは多数存在**

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：割当問題の最適解

$$
\begin{array}{c@{\;}c}
 & \begin{array}{cccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

最大利得和 $= 57$**，それを達成するマッチングは多数存在**

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：割当問題の最適解

$$
\begin{array}{c}
 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
20 & 18 & \color{red}{16} & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & \color{red}{17} & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & \color{red}{7} & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & \color{red}{4} & 3 & 1 & 0 & 0 \\
\color{red}{10} & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & \color{red}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

最大利得和 $= 57$，それを達成するマッチングは多数存在

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：コアから価格へ

コアの要素 $(y_1, \dots, y_8, z_1, \dots, z_{10})$ **を考えると**

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10}
\end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{array}
\begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$y_1 + z_1 = 20,\ y_2 + z_2 = 17,\ \dots,$

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：コアから価格へ

コアの要素 $(y_1, \ldots, y_8, z_1, \ldots, z_{10})$ **を考えると**

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$y_1 + z_1 = 20,\ y_2 + z_2 = 17,\ \ldots,$

- b_1 **が** s_1 **に** p **だけ支払い，** b_2 **が** s_2 **に** q **だけ支払うとする**
- $y_1 = p - 10,\ z_1 = 30 - p,\ y_2 = q - 11,\ z_2 = 28 - q$

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：コアから価格へ

コアの要素 $(y_1, \ldots, y_8, z_1, \ldots, z_{10})$ **を考えると**

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\color{red}{20} & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & \color{red}{17} & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & \color{red}{11} & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & \color{red}{7} & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & \color{red}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$y_1 + z_1 = 20,\ y_2 + z_2 = 17,\ \ldots,$

- b_1 **が** s_1 **に** p **だけ支払い，**b_2 **が** s_2 **に** q **だけ支払うとする**
- $y_1 = p - 10,\ z_1 = 30 - p,\ y_2 = q - 11,\ z_2 = 28 - q$
- $y_1 + z_2 = 18 + p - q,\ y_2 + z_1 = 19 - p + q$

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：コアから価格へ

コアの要素 $(y_1, \ldots, y_8, z_1, \ldots, z_{10})$ **を考えると**

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\
\hline
s_1 & 20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
s_2 & 19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
s_3 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
s_4 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
s_5 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_6 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_8 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$y_1 + z_1 = 20,\ y_2 + z_2 = 17,\ \ldots,\ y_1 + z_2 = 18,\ y_2 + z_1 = 19$

- b_1 **が** s_1 **に** p **だけ支払い，** b_2 **が** s_2 **に** q **だけ支払うとする**
- $y_1 = p - 10,\ z_1 = 30 - p,\ y_2 = q - 11,\ z_2 = 28 - q$
- $y_1 + z_2 = 18 + p - q,\ y_2 + z_1 = 19 - p + q$

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：コアから価格へ

コアの要素 $(y_1, \ldots, y_8, z_1, \ldots, z_{10})$ **を考えると**

$$
\begin{array}{c}
 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$y_1 + z_1 = 20,\ y_2 + z_2 = 17,\ \ldots,\ y_1 + z_2 = 18,\ y_2 + z_1 = 19$

- b_1 **が** s_1 **に** p **だけ支払い，**b_2 **が** s_2 **に** q **だけ支払うとする**
- $y_1 = p - 10,\ z_1 = 30 - p,\ y_2 = q - 11,\ z_2 = 28 - q$
- $y_1 + z_2 = 18 + p - q,\ y_2 + z_1 = 19 - p + q$
- $\therefore\ p = q$ **で，**s_1 **と** s_2 **は同じ金額受取り，**b_1 **と** b_2 **は同じ金額支払う**

Böhm-Bawerk の馬市場 (4)：コアから価格へ — 他のプレイヤー

コアの要素 $(y_1, \ldots, y_8, z_1, \ldots, z_{10})$ を考えると

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\
\hline
s_1 & \color{red}{20} & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
s_2 & 19 & \color{red}{17} & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
s_3 & 15 & 13 & \color{red}{11} & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
s_4 & 13 & 11 & 9 & \color{red}{7} & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
s_5 & 10 & 8 & 6 & 4 & \color{red}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_6 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0 & 0 \\
s_8 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & 0
\end{array}
$$

同様にして，

- 取引を行う売り手 $s_1, \ldots, s_5, (s_6)$ は同じ金額を受取り
- 取引を行う買い手 $b_1, \ldots, b_5, (b_6)$ は同じ金額を支払う

Böhm-Bawerk の馬市場 (4)：コアから価格へ — 他のプレイヤー

コアの要素 $(y_1, \ldots, y_8, z_1, \ldots, z_{10})$ を考えると

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{array} & \begin{pmatrix}
20 & 18 & 16 & 14 & 12 & 11 & 10 & 8 & 7 & 5 \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 \\
15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 0 \\
13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

同様にして，

- 取引を行う売り手 $s_1, \ldots, s_5, (s_6)$ は同じ金額を受取り
- 取引を行う買い手 $b_1, \ldots, b_5, (b_6)$ は同じ金額を支払う

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 0$

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 10$

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 15$

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 20$

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 25$

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 30$

売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：価格からコアへ

取引金額 p を固定して，対応する利得ベクトルがコアの要素か考える

$p = 35$

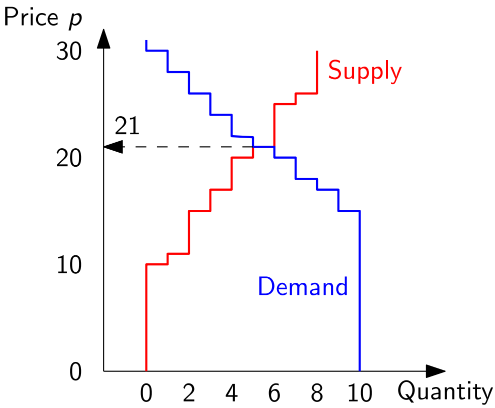
売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

買い手	評価額
b_1	30
b_2	28
b_3	26
b_4	24
b_5	22
b_6	21
b_7	20
b_8	18
b_9	17
b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：需要曲線と供給曲線



取引価格 21 **で，馬が** 5〜6 **頭売買される**

Böhm-Bawerk の馬市場 (6)：需給の変化

需要が減ったら？

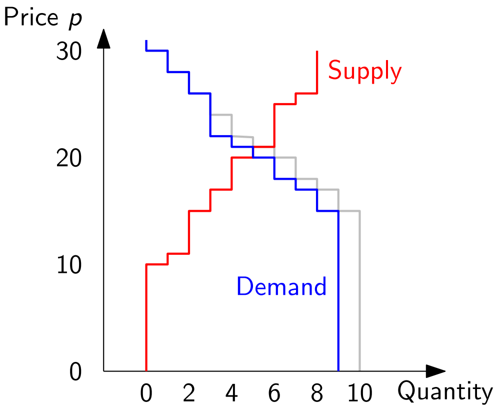
売り手	評価額
s_1	10
s_2	11
s_3	15
s_4	17
s_5	20
s_6	21
s_7	25
s_8	26

	買い手	評価額
	b_1	30
	b_2	28
	b_3	26
×	b_4	24
	b_5	22
	b_6	21
	b_7	20
	b_8	18
	b_9	17
	b_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (7)：需給の変化 — 需要曲線と供給曲線



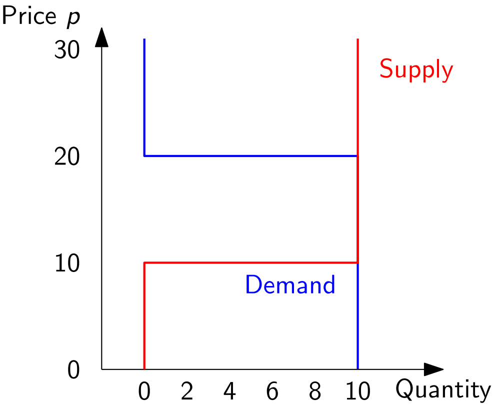
取引価格 20〜21 **で，馬が** 5 **頭売買される**

Böhm-Bawerk の馬市場 (別の例) (1)

次のような極端な例を考える

- 10 **人の売り手：評価額は全員同じで** 10
- 10 **人の買い手：評価額は全員同じで** 20

需要曲線と供給曲線



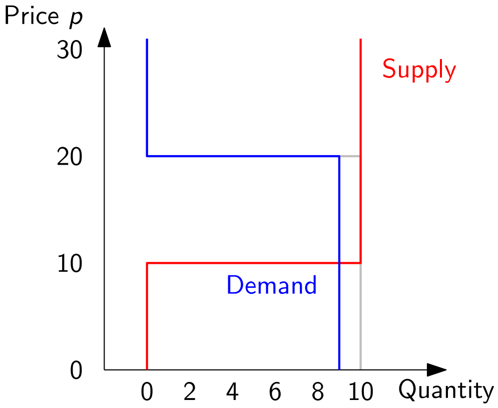
取引価格 10〜20 **で，**
馬が 10 **頭売買される**

Böhm-Bawerk の馬市場 (別の例) (2)

需要が減ったら

- 10 人の売り手：評価額は全員同じで 10
- 9 人の買い手：評価額は全員同じで 20

需要曲線と供給曲線



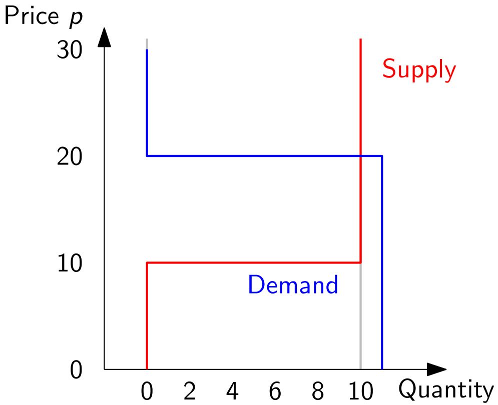
取引価格 10 で，
馬が 9 頭売買される

Böhm-Bawerk の馬市場 (別の例) (3)

需要が増えたら

- 10 人の売り手：評価額は全員同じで 10
- 11 人の買い手：評価額は全員同じで 20

需要曲線と供給曲線



取引価格 20 で，
馬が 10 頭売買される

目次

今日やったこと

目標

特性関数形ゲームのコアにまつわる離散構造とアルゴリズムを見る

- 「割当ゲーム」を例として
- 重要項目：コアと線形計画問題の双対性との関連
- 重要項目：コアと取引価格の関係

割当ゲームは深く研究されている対象であり，その一般化や類似概念が提案されている．日本語で読める以下の書籍は非常に貴重である．

- 田村 明久,「離散凸解析とゲーム理論」，朝倉書店，2009 年．

目次