離散最適化基礎論 第 11 回
特性関数形ゲームのコア：離散構造とアルゴリズム (1)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 25 日

最終更新：2013 年 1 月 26 日　09:23

概要

目標

特性関数形ゲームのコアにまつわる離散構造とアルゴリズムを見る

- 「割当ゲーム」を例として
- 重要概念：01 整数線形計画問題，線形計画緩和
- 重要概念：凸多面体の整数性

目次

目次

特性関数形ゲームの記述

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合
- 提携：N の部分集合のこと
- 特性関数 $v \colon 2^N \to \mathbb{R}$，$v(\emptyset) = 0$ を満たす

解釈

$v(S)$ は提携 S に属するプレイヤーが協力することで得られる利得和の最大値

特性関数形ゲームで考える問題

プレイヤーの間で協力が可能であるとき，

考える問題 1：提携形成問題

どのような提携が形成されるか？

考える問題 2：利得分配問題

提携の利得和がプレイヤーの間でどう分配されるか？

提携 N が形成されるとして，利得分配問題を主に考えていく

利得和の分配

特性関数形ゲーム (N, v)

利得ベクトルとは？

(N, v) の**利得ベクトル**とはベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ のこと

解釈

x_i は，分配後にプレイヤー i が得る利得

利得分配問題で考えること

どのような利得ベクトルであれば，協力する意味を損なわないか

つまり，利得ベクトルが満たすべき性質を議論したい

全体合理性

特性関数形ゲーム (N, v)，利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$

全体合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ に対する次の条件を**全体合理性**と呼ぶ

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

解釈

- 各プレイヤーに分配した利得を足すと，$v(N)$ になる
- $v(N)$ を分割して，利得ベクトル x を作る

個人合理性

特性関数形ゲーム (N, v)**，利得ベクトル** $x \in \mathbb{R}^N$

個人合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ **に対する次の条件を個人合理性と呼ぶ**

任意のプレイヤー $i \in N$ **に対して，** $x_i \geq v(\{i\})$

解釈

- **各プレイヤーに対して分配した利得は，そのプレイヤーが単独で行動したときの利得以上である**
- $x_i < v(\{i\})$ **となるプレイヤー** i **は** x **に対して不満を持つ**

個人合理性：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

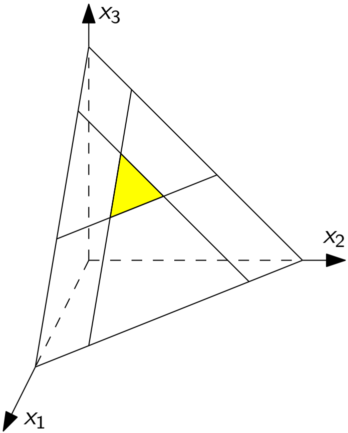
$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$

個人合理性：例 図示

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



提携合理性

特性関数形ゲーム (N, v)**，利得ベクトル** $x \in \mathbb{R}^N$

提携合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ **に対する次の条件を提携合理性と呼ぶ**

$$\text{任意の提携 } S \subseteq N \text{ に対して，} \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

解釈

- **各提携に対して分配した利得和は，その提携が単独で行動したときの利得和以上である**
- $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$ **となる提携** S **は** x **に対して不満を持つ**

注：x **が提携合理性を満たす** $\Rightarrow$ x **が個人合理性を満たす**

特性関数形ゲームのコア

特性関数形ゲーム (N, v)

コアとは？

(N, v) の**コア**とは，全体合理性，個人合理性，提携合理性を満たす利得ベクトル全体の集合

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ \text{任意の } S \subseteq N \text{ に対して } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \end{array} \right\}$$

- **コアは特性関数形ゲームの解の 1 つであると考えられている (協力ゲームの解概念)**
- **コアは凸多面体 (有限個の線形不等式で記述されている)**
- **優加法的ゲームでもコアは空かもしれない (前回の演習問題)**

コア：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

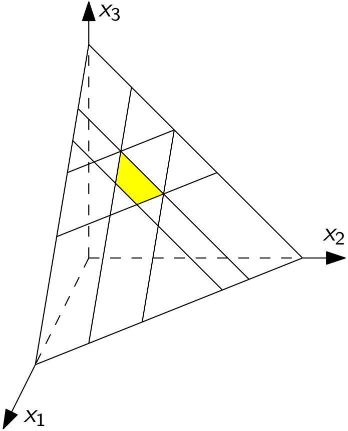
この特性関数形ゲームのコアは？

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$

コア：例 図示

この特性関数形ゲームのコアは？

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



今日考えたいこと

利得分配問題を解くために，コアの 1 点を見つけたい

- しかし，コアが空である場合もある
- $\rightsquigarrow$ では，どのような特性関数形ゲームのコアが非空なのか？
- コアが非空であっても，コアの 1 点を見つけるのは別問題
- $\rightsquigarrow$ コアの 1 点を見つけるアルゴリズムが欲しい

これを市場経済の問題で考えたい

- 専門的には「割当ゲーム」と呼ばれる枠組で考えたい

目次

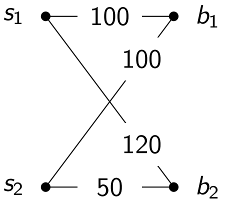
市場経済 (例)

2 人の売り手 s_1, s_2：商品を 1 つ持っている

- s_1 は 100 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得)
- s_2 は 150 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 150$ 円の利得)

2 人の買い手 b_1, b_2：商品を 1 つ欲しい

- b_1 は
  - s_1 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 250 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$250 - p$ 円の利得)
- b_2 は
  - s_1 の商品を 220 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)



考えたいこと

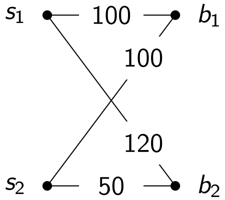
- 利得和を最大にする取引は？
- そのときの価格は？

市場経済 (例) 特性関数

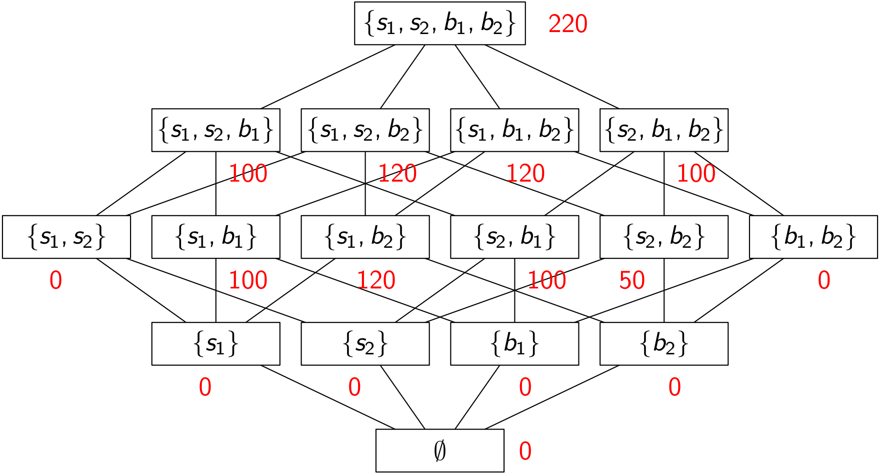
プレイヤー集合 $N = \{s_1, s_2, b_1, b_2\}$

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{s_1\}) = 0$
- $v(\{s_2\}) = 0$
- $v(\{b_1\}) = 0$
- $v(\{b_2\}) = 0$
- $v(\{s_1, s_2\}) = 0$
- $v(\{s_1, b_1\}) = 100$
- $v(\{s_1, b_2\}) = 120$
- $v(\{s_2, b_1\}) = 100$
- $v(\{s_2, b_2\}) = 50$
- $v(\{b_1, b_2\}) = 0$

- $v(\{s_1, s_2, b_1\}) = 100$
- $v(\{s_1, s_2, b_2\}) = 120$
- $v(\{s_1, b_1, b_2\}) = 120$
- $v(\{s_2, b_1, b_2\}) = 100$
- $v(\{s_1, s_2, b_1, b_2\}) = 220$



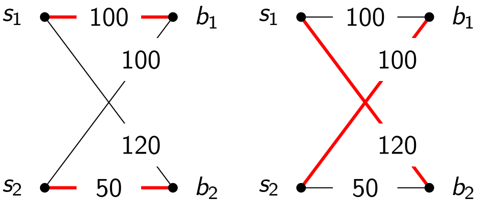
市場経済 (例) 特性関数とハッセ図



特性関数値の計算

$v(\{s_1, s_2, b_1, b_2\}) = 220$

- **取引の方法は 2 つある**



- **この中で利得和を最大にするのは右側の取引**

取引の方法 $\approx$ **マッチング**

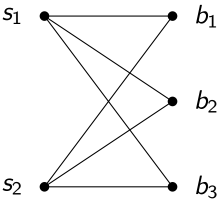
マッチングとは？ (直観的な定義)

- **各売り手が高々1 人の買い手と対応**
- **各買い手が高々1 人の売り手と対応**

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- 売り手の集合 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$，買い手の集合 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ がいる
- 売り手 s_i と買い手 b_j が取引したときの利得和 a_{ij} が分かっている ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ という行列だと見なす)
- このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい



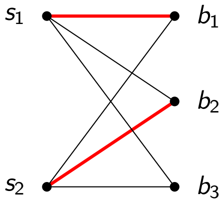
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $=$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- **売り手の集合** $S = \{s_1, \dots, s_m\}$**，買い手の集合** $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ **がいる**
- **売り手** s_i **と買い手** b_j **が取引したときの利得和** a_{ij} **が分かっている** ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **という行列だと見なす**)
- **このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい**



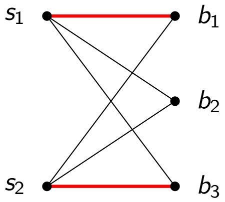
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 20$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- 売り手の集合 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$，買い手の集合 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ がいる
- 売り手 s_i と買い手 b_j が取引したときの利得和 a_{ij} が分かっている ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ という行列だと見なす)
- このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい



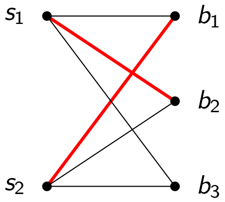
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 30$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- **売り手の集合** $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$**，買い手の集合** $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **がいる**
- **売り手** s_i **と買い手** b_j **が取引したときの利得和** a_{ij} **が分かっている** ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **という行列だと見なす**)
- **このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい**



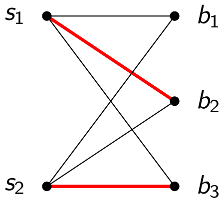
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 50$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- **売り手の集合** $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$**，買い手の集合** $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **がいる**
- **売り手** s_i **と買い手** b_j **が取引したときの利得和** a_{ij} **が分かっている** ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **という行列だと見なす**)
- **このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい**



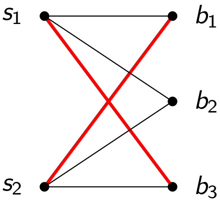
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 50$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- **売り手の集合 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$，買い手の集合 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ がいる**
- **売り手 s_i と買い手 b_j が取引したときの利得和 a_{ij} が分かっている** ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **という行列だと見なす**)
- **このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい**



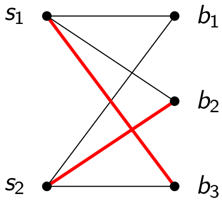
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & \color{red}{30} \\ \color{red}{20} & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 50$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- 売り手の集合 $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$，買い手の集合 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ がいる
- 売り手 s_i と買い手 b_j が取引したときの利得和 a_{ij} が分かっている ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ という行列だと見なす)
- このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい



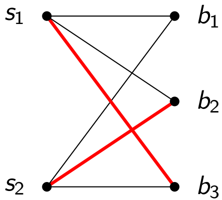
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & \color{red}{30} \\ 20 & \color{red}{10} & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 40$

割当問題：特性関数値を計算する問題

割当問題とは？

- **売り手の集合** $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$**，買い手の集合** $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ **がいる**
- **売り手** s_i **と買い手** b_j **が取引したときの利得和** a_{ij} **が分かっている** ($A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ **という行列だと見なす**)
- **このとき，全体の利得和を最大にする取引を求めたい**



$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

全体の利得和 $= 40$

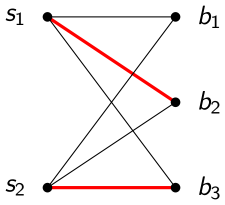
全体の利得和の最大値 (最適値) $= 50$

割当問題を数理最適化問題として記述する (1)

変数の設定

- 売り手 s_i と買い手 b_j に対して $x_{ij} \in \{0, 1\}$ という変数

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (s_i \text{ と } b_j \text{ が取引をする}) \\ 0 & (s_i \text{ と } b_j \text{ は取引をしない}) \end{cases}$$



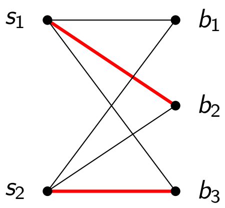
←このマッチングを x_{ij} によって表現すると

- $x_{11} = 0,\ x_{12} = 1,\ x_{13} = 0,$
- $x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 1$

割当問題を数理最適化問題として記述する (2)

目的関数の設定

- 目的は $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$ の最大化



$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

←このマッチングを x_{ij} によって表現すると

- $x_{11} = 0,\ x_{12} = 1,\ x_{13} = 0,$
- $x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 1$

このマッチングの目的関数値

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} \\ &= 10 \cdot 0 + 30 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 20 \cdot 1 \\ &= 30 + 20 \\ &= 50 \end{aligned}$$

割当問題を数理最適化問題として記述する (3)

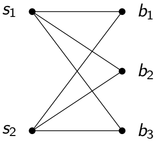
制約の設定 ((x_{ij}) がマッチングで表すことの記述)

- 「各売り手が高々1 人の買い手と対応」を記述

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{for all } i \in \{1, \dots, m\}$$

- 「各買い手が高々1 人の売り手と対応」を記述

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{for all } j \in \{1, \dots, n\}$$



←この問題における制約

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1$

- $x_{11} + x_{21} \leq 1$
- $x_{12} + x_{22} \leq 1$
- $x_{13} + x_{23} \leq 1$

割当問題を数理最適化問題として記述する (まとめ)

割当問題

a_{ij} は定数，x_{ij} は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad \text{for all } i \in \{1,\dots,m\} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 \qquad \text{for all } j \in \{1,\dots,n\} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{for all } i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}
\end{aligned}
$$

これは線形計画問題に似ているけれども**そうではない**

割当問題を数理最適化問題として記述する (まとめ)

割当問題

a_{ij} **は定数，** x_{ij} **は変数**

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 & \text{for all } i \in \{1,\ldots,m\} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & \text{for all } j \in \{1,\ldots,n\} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \text{for all } i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\}
\end{array}
$$

これは線形計画問題に似ているけれども<u>そうではない</u>

- 01 **整数線形計画問題と呼ばれる**

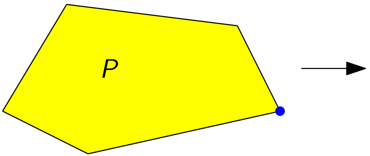
目次

復習：線形計画問題

n：自然数

線形計画問題 (linear program) とは？

$\mathbb{R}^n$ における線形関数と凸多面体 P が与えられたとき，
その関数値を最小にするような P 上の点を見つける問題



復習：基準形の線形計画問題

- n を自然数として，$\mathbb{R}^n$ における凸多面体 P を考える
- P が行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ を使って

$$P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

  と書けるとする
- 考える線形関数はベクトル $c \in \mathbb{R}^n$ を使って

$$c^\top x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

  と書けるとする

つまり，このとき線形計画問題は

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array}$$

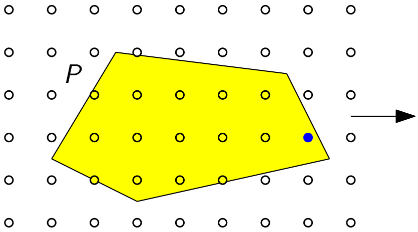
とかける (基準形 (canonical form) と呼ばれる)

整数線形計画問題

n：自然数

整数線形計画問題 (integer linear program) とは？

$\mathbb{R}^n$ における線形関数と凸多面体 P が与えられたとき，
その関数値を最小にするような P 上の整数点を見つける問題

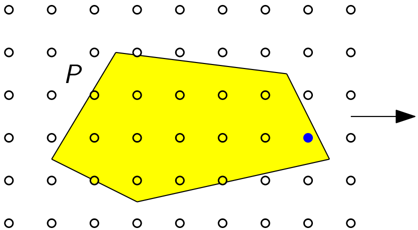


01 整数線形計画問題

n：自然数

01 整数線形計画問題 (01 integer linear program) とは？

$\mathbb{R}^n$ における線形関数と凸多面体 P が与えられたとき，
その関数値を最小にするような P 上の 01 点を見つける問題



01 点：各座標が 0 か 1 であるような点

01 整数線形計画問題とその線形計画緩和

01 整数線形計画問題 (P)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

その線形計画緩和 (R)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array}$$

性質 0

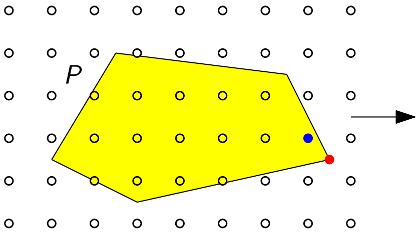
$x \in \mathbb{R}^n$ **が** (P) **の許容解** $\Rightarrow$ x **は** (R) **の許容解**

線形計画緩和の性質 1

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$



線形計画緩和の性質 1：証明

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$

証明：x を (P) の最適解とする

線形計画緩和の性質 1：証明

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$

証明：x を (P) の最適解とする

- $\boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}}$

線形計画緩和の性質 1：証明

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$

証明：x を (P) の最適解とする

- $\boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (P) の許容解でもあるので，x は (R) の許容解

($\because$ 前ページの性質 0)

線形計画緩和の性質 1：証明

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$

証明：x を (P) の最適解とする

- $\boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (P) の許容解でもあるので，x は (R) の許容解 ($\because$ 前ページの性質 0)
- $\therefore$ $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 1：証明

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$

<u>**証明**</u>：x を (P) の最適解とする

- $\boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (P) の許容解でもあるので，x は (R) の許容解
  ($\because$ 前ページの性質 0)
- $\therefore$ $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- (P) と (R) の目的関数は同じなので，
  $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}}$

線形計画緩和の性質 1：証明

線形計画緩和の性質 1

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$$

証明：x を (P) の最適解とする

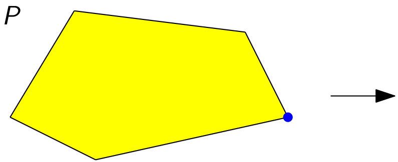
- $\boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (P) の許容解でもあるので，x は (R) の許容解
  ($\because$ 前ページの性質 0)
- $\therefore$ $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- (P) と (R) の目的関数は同じなので，
  $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}}$
- $\therefore$ $\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$ □

線形計画緩和の性質 2

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

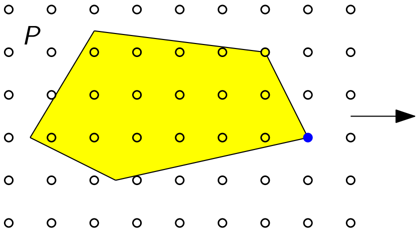


線形計画緩和の性質 2

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解



線形計画緩和の性質 2：証明

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

証明：

- x は (R) の最適解なので，
  $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\text{(R) の最適解 } x \text{ が } x \in \{0,1\}^n \text{ を満たす} \Rightarrow x \text{ は (P) の最適解}$$

証明：

- x は (R) の最適解なので，
  $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- (P) と (R) の目的関数は同じなので，
  $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\text{(R) の最適解 } x \text{ が } x \in \{0,1\}^n \text{ を満たす} \Rightarrow x \text{ は (P) の最適解}$$

証明：

- x は (R) の最適解なので，
  $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- (P) と (R) の目的関数は同じなので，
  $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (R) の最適解なので，(R) の許容解でもあり，かつ，
  $x \in \{0,1\}^n$ なので，x は (P) の許容解

線形計画緩和の性質 2：証明

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

証明：

- x は (R) の最適解なので，
  $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- (P) と (R) の目的関数は同じなので，
  $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (R) の最適解なので，(R) の許容解でもあり，かつ，
  $x \in \{0,1\}^n$ なので，x は (P) の許容解
- $\therefore$ $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

証明：

- x は (R) の最適解なので，
  $\boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- (P) と (R) の目的関数は同じなので，
  $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) における } x \text{ の目的関数値}}$
- x は (R) の最適解なので，(R) の許容解でもあり，かつ，
  $x \in \{0,1\}^n$ なので，x は (P) の許容解
- $\therefore$ $\boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$
- $\therefore$ $\boxed{\text{(R) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明 (続き)

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

証明 (続き)：

- [ここまでのまとめ]
  - x は (P) の許容解
  - $\boxed{\text{(R) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明 (続き)

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0,1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

証明 (続き)：

- [ここまでのまとめ]
  - x は (P) の許容解
  - $\boxed{\text{(R) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$
- 性質 1 から，$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明 (続き)

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

$$\text{(R) の最適解 } x \text{ が } x \in \{0,1\}^n \text{ を満たす} \Rightarrow x \text{ は (P) の最適解}$$

証明 (続き)：

- [ここまでのまとめ]
  - x は (P) の許容解
  - $\boxed{\text{(R) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$
- 性質 1 から，$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- $\therefore \boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$

線形計画緩和の性質 2：証明 (続き)

線形計画緩和の性質 2

(P) と (R) に最適解が存在するとき

(R) の最適解 x が $x \in \{0, 1\}^n$ を満たす $\Rightarrow$ x は (P) の最適解

証明 (続き)：

- [ここまでのまとめ]
  - x は (P) の許容解
  - $\boxed{\text{(R) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} \geq \boxed{\text{(P) の最適値}}$
- 性質 1 から，$\boxed{\text{(P) の最適値}} \geq \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- $\therefore$ $\boxed{\text{(P) の最適値}} = \boxed{\text{(P) における } x \text{ の目的関数値}} = \boxed{\text{(R) の最適値}}$
- つまり，x は (P) の最適解 $\square$

線形計画緩和の性質が教えてくれること

(P) を解かなくても，緩和 (R) を解くことで (P) に関する情報が得られる

性質 1 より

(R) の最適値が分かると (P) の最適値の下界が得られる

- つまり，(R) の最適値から (P) の許容解の良さが分かる

性質 2 より

(R) の最適解が 01 点ならば，それは (P) の最適解になる

- つまり，(R) を解くだけで (P) も解けてしまうことがある

なぜ有効なのか？

通常，(P) を解くのは難しいが，(R) を解くのは簡単だから

目次

割当問題を数理最適化問題として記述する (まとめ) 再掲

割当問題 (P)

a_{ij} **は定数，** x_{ij} **は変数**

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 && \text{for all } i \in \{1,\dots,m\} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 && \text{for all } j \in \{1,\dots,n\} \\
& x_{ij} \in \{0,1\} && \text{for all } i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}
\end{aligned}
$$

これは線形計画問題に似ているけれどもそうではない

- 01 **整数線形計画問題と呼ばれる**

割当問題の線形計画緩和

割当問題の線形計画緩和 (R)

a_{ij} **は定数，** x_{ij} **は変数**

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 & \text{for all } i \in \{1,\dots,m\} \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le 1 & \text{for all } j \in \{1,\dots,n\} \\
& x_{ij} \ge 0 & \text{for all } i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}
\end{array}
$$

これは線形計画問題

割当問題の整数性

定理：割当問題の整数性

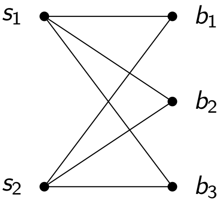
割当問題の線形計画緩和 (R) の最適解 $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で，
各成分が 0 か 1 であるものが存在する

つまり，(R) を解くと (P) も解ける

割当問題の線形計画緩和：例

割当問題の線形計画緩和 (R) の制約：例

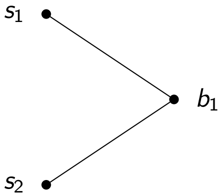
$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\
x_{12} + x_{22} &\leq 1 \\
x_{13} + x_{23} &\leq 1 \\
-x_{11} &\leq 0 \\
-x_{12} &\leq 0 \\
-x_{13} &\leq 0 \\
-x_{21} &\leq 0 \\
-x_{22} &\leq 0 \\
-x_{23} &\leq 0
\end{aligned}
$$



割当問題の線形計画緩和：別の例 1

(R) の制約：別の例 1

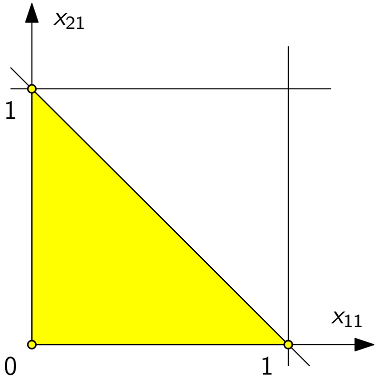
$$
\begin{aligned}
x_{11} &\leq 1 \\
x_{21} &\leq 1 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\
-x_{11} &\leq 0 \\
-x_{21} &\leq 0
\end{aligned}
$$



割当問題の線形計画緩和：別の例 1 — 許容領域

(R) の制約：別の例 1

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\leq 1 \\
x_{21} &\leq 1 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\
-x_{11} &\leq 0 \\
-x_{21} &\leq 0
\end{aligned}
$$

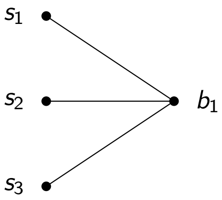


3 つの頂点はどれも 01 点

割当問題の線形計画緩和：別の例 2

(R) の制約：別の例 2

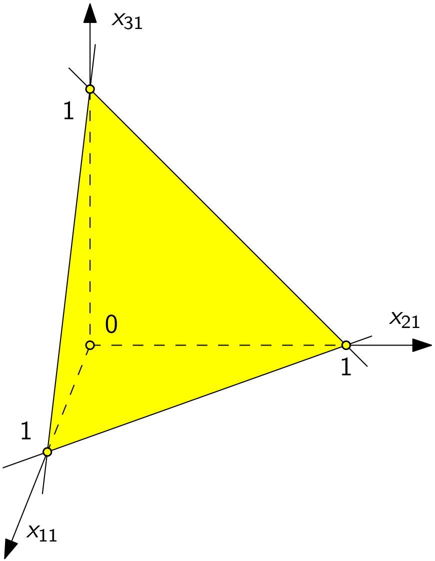
$$
\begin{aligned}
x_{11} &\le 1 \\
x_{21} &\le 1 \\
x_{31} &\le 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\le 1 \\
-x_{11} &\le 0 \\
-x_{21} &\le 0 \\
-x_{31} &\le 0
\end{aligned}
$$



割当問題の線形計画緩和：別の例 2

(R) の制約：別の例 2

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\leq 1\\
x_{21} &\leq 1\\
x_{31} &\leq 1\\
x_{11}+x_{21}+x_{31} &\leq 1\\
-x_{11} &\leq 0\\
-x_{21} &\leq 0\\
-x_{31} &\leq 0
\end{aligned}
$$



割当問題の整数性：証明すれば十分なこと

定理：割当問題の整数性

割当問題の線形計画緩和 (R) の最適解 $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で，
各成分が 0 か 1 であるものが存在する

証明すれば十分なこと

1. (R) に最適解が存在する
2. (R) の許容領域の頂点はすべて 01 点である

なぜこれで十分か？

- (R) は (だいたい) 基準形の線形計画問題
- 基準形の線形計画問題が最適解を持つならば，
  それは許容領域の頂点であるような最適解を持つ
  (第 3 回のスライド p. 69 にある「性質 2」)

(R) に最適解が存在することの証明

(R) に最適解が存在しないとしたらどういうときか？

- (R) の許容領域が空
- (R) の許容領域が非有界

しかし，

- (R) の許容領域は非空
  - すべての成分が 0 である点は (R) の許容解だから
- (R) の許容領域は有界
  - これは次のスライドで証明する

したがって，(R) には最適解が存在する □

(R) に最適解が存在することの証明 (続)

観察

$x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が (R) の許容解 $\Rightarrow 0 \le x_{ij} \le 1 \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$

証明：$i \in \{1, \ldots, m\}$ と $j \in \{1, \ldots, n\}$ を任意に選ぶ

- $x_{ij} \ge 0$ はすぐに分かる
- $x_{ij} \le 1$ については，任意の j' に対して $x_{ij'} \ge 0$ なので

$$x_{ij} \le \sum_{j'=1}^{n} x_{ij'} \le 1$$

- よって，$0 \le x_{ij} \le 1$ □

つまり，(R) の許容領域は有界

- 特に，(R) の許容領域に含まれる整数点の成分は 必ず 0 か 1

割当問題の整数性：証明すれば十分なこと (再掲)

定理：割当問題の整数性

割当問題の線形計画緩和 (R) の最適解 $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で，
各成分が 0 か 1 であるものが存在する

証明すれば十分なこと

1. (R) に最適解が存在する
2. (R) の許容領域の頂点はすべて 01 点である

なぜこれで十分か？

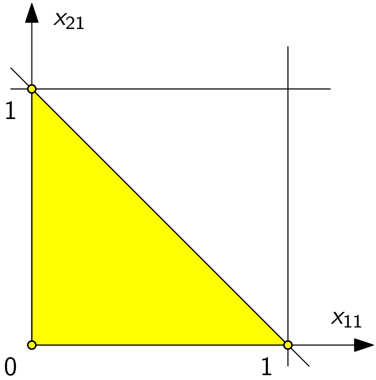
- (R) は (だいたい) 基準形の線形計画問題
- 基準形の線形計画問題が最適解を持つならば，
  それは許容領域の頂点であるような最適解を持つ

(第 3 回のスライド p. 69 にある「性質 2」)

割当問題の線形計画緩和：別の例 1 — 頂点座標の計算 (1)

(R) の制約：別の例 1

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\leq 1 \\
x_{21} &\leq 1 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\
-x_{11} &\leq 0 \\
-x_{21} &\leq 0
\end{aligned}
$$

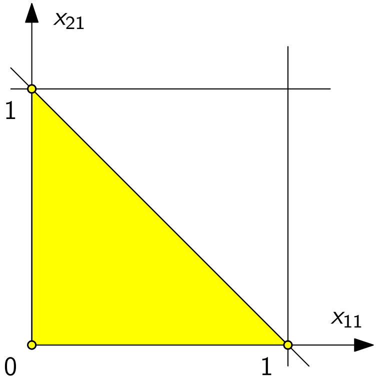


頂点は 2 つの不等式を等号で満たす

割当問題の線形計画緩和：別の例 1 — 頂点座標の計算 (2)

(R) の制約：別の例 1

$$\begin{aligned} x_{11} &\leq 1 \\ x_{21} &\leq 1 \\ x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\ -x_{11} &\leq 0 \\ -x_{21} &\leq 0 \end{aligned}$$



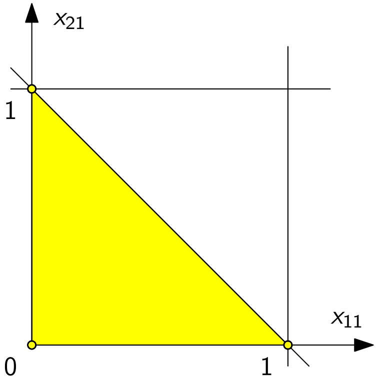
$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} &= 1 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow x_{11} = 1, x_{21} = 0$

割当問題の線形計画緩和：別の例 1 — 頂点座標の計算 (3)

(R) の制約：別の例 1

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\leq 1 \\
x_{21} &\leq 1 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\
-x_{11} &\leq 0 \\
-x_{21} &\leq 0
\end{aligned}
$$



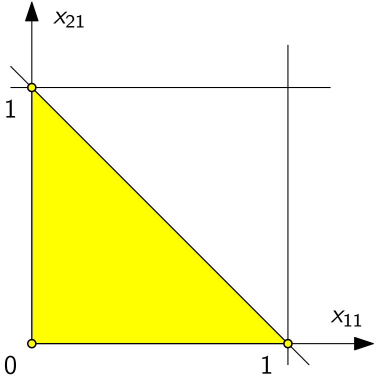
$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} &= 1 \\
-x_{11} &= 0
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow x_{11} = 0, x_{21} = 1$

割当問題の線形計画緩和：別の例 1 — 頂点座標の計算 (4)

(R) の制約：別の例 1

$$
\begin{aligned}
x_{11} &\leq 1 \\
x_{21} &\leq 1 \\
x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\
-x_{11} &\leq 0 \\
-x_{21} &\leq 0
\end{aligned}
$$



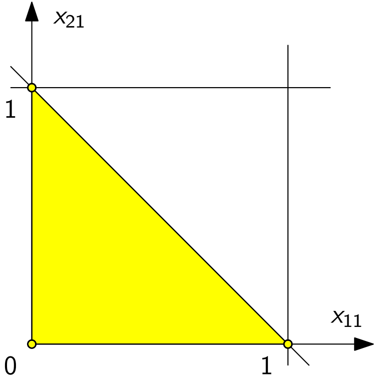
$$
\begin{aligned}
x_{11} &= 1 \\
x_{21} &= 1
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow x_{11} = 1, x_{21} = 1$
(これは頂点に対応しない)

割当問題の線形計画緩和：別の例 1 — 頂点座標の計算 (5)

(R) の制約：別の例 1

$$\begin{aligned} x_{11} &\leq 1 \\ x_{21} &\leq 1 \\ x_{11} + x_{21} &\leq 1 \\ -x_{11} &\leq 0 \\ -x_{21} &\leq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 \\ -x_{11} &= 0 \end{aligned}$$

$\leadsto$ **解なし**
(これは頂点に対応しない)

(R) の許容領域の頂点はすべて 01 点である：証明方針

証明したいこと

(R) の許容領域の頂点はすべて 01 点である

証明方針

- (R) の変数の数は mn 個 (許容領域は mn 次元空間における凸多面体)
- (R) の許容領域の頂点は mn 個の不等式を等号で満たす
- $\therefore$ (R) の制約式を mn 個任意に選び，そこから線形方程式を作る
- その方程式が解を持つとき，それが整数解であればよい
- (R) の許容領域に含まれる整数点は 01 点しかないので，これで十分

知りたいこと

- どんな線形方程式が整数解を持つのか？

復習：Cramer の公式

- 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，ベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ に対して方程式

$$Ax = b$$

を考える

- A が正則であるとき，この方程式の解は $x = A^{-1}b$

復習：Cramer の公式

このとき，解の各成分 x_i は

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

となる

- ただし，A_i は A の第 i 列を b で置き換えた行列

Cramer の公式と整数解

復習：Cramer の公式 (再掲)

このとき，解の各成分 x_i は

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

となる

- ただし，A_i は A の第 i 列を b で置き換えた行列

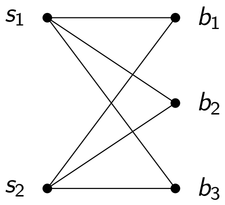
A, b の各成分が整数であると仮定する

- このとき，$\det(A)$ も整数 (演習問題)
- 同様に，$\det(A_i)$ も整数
- $\therefore$ $\det(A) = \pm 1$ ならば，x_i も整数

割当問題の線形計画緩和：例 (行列形式)

割当問題の線形計画緩和 (R) の制約：例

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23}
\end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix}
1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
$$



メモ：この式を黒板に書いておく

割当問題の線形計画緩和：例 (行列形式) 続

第 1, 2, 3, 4, 6, 7 番目の不等式を選んで，線形方程式を作ってみると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この係数行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

正方小行列の行列式

今から証明すること

(R) の許容領域を表現する不等式系の係数行列の任意の正方小行列の行列式は 0 か 1 か -1

これが証明できれば十分

証明の方針

正方小行列の次元に関する帰納法

補足

任意の正方小行列の行列式が 0 か 1 か -1 である行列は
完全ユニモジュラ行列 (totally unimodular matrix) と呼ばれ，
離散最適化で重要な役割を果たすが，ここでは深入りしない

正方小行列の行列式：証明 (基底段階)

観察

2 種類の行

- 1 がいくつか，残りは 0
- -1 が 1 つ，残りは 0

列は？

- 1 が 2 つ，-1 が 1 つ，残りは 0

帰納法の基底段階

正方小行列の次元が 1 のとき

- 小行列は (0) か (1) か (-1)
- $\therefore$ その行列式は $0, 1, -1$ のどれか
- これで基底段階は終了

正方小行列の行列式：証明 (帰納段階)

帰納段階を進める

次元 k の正方小行列の行列式がどれも $0, 1, -1$ のどれかであると仮定

- 次元 $k+1$ の正方小行列を考える
- 場合分け
  1. if 0 しか持たない行を持つ
  2. else if -1 のある行を持つ
  3. else if 1 が 1 つだけある列を持つ
  4. else それ以外 (どの列にも 1 が 2 つ，-1 はない)

正方小行列の行列式：証明 (帰納段階) 場合 1

考えている正方小行列 B が 0 しか持たない行を持つ

- このとき，$\det(B) = 0$

例：第 1, 2, 3 行と第 4, 5, 6 列でできる正方小行列の行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

正方小行列の行列式：証明 (帰納段階) 場合 2

考えている正方小行列 B が -1 のある行を持つ

- その行の他の成分はすべて 0
- よって，その行に関して余因子展開を行い，帰納法の仮定を使うと，$\det(B)$ は 0 か 1 か -1 であることが分かる

例：第 3, 4, 5, 6 行と第 1, 2, 3, 4 列でできる正方小行列の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

正方小行列の行列式：証明 (帰納段階) 場合 3

考えている正方小行列 B に 1 が 1 つだけある列がある

- その列の他の成分はすべて 0 ($\because$ 場合 2 ではない)
- よって，その列に関して余因子展開を行い，帰納法の仮定を使うと，$\det(B)$ は 0 か 1 か -1 であることが分かる

例：第 1, 2, 3, 4 行と第 3, 4, 5, 6 列でできる正方小行列の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

正方小行列の行列式：証明 (帰納段階) 場合 4

その他

- つまり，B の各列には 1 が 2 つあり，他の成分は 0
- B の各行は売り手か買い手に対応
- 行ベクトル $y \in \mathbb{R}^{k+1}$ を次のように定義
  - i が売り手に対応 $\Rightarrow y_i = 1$，買い手に対応 $\Rightarrow y_i = -1$
- このとき，$yB = 0$ となり，よって，$\det(B) = 0$
  ($\because$ 各列が売り手と買い手を結ぶ取引に対応) □

例：第 1, 2, 3, 4, 5 行と第 1, 2, 3, 4, 5 列でできる正方小行列に y をかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

割当問題の整数性：証明すれば十分なこと (再掲)

定理：割当問題の整数性

割当問題の線形計画緩和 (R) の最適解 $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ で，
各成分が 0 か 1 であるものが存在する

証明すれば十分なこと

1. (R) に最適解が存在する
2. (R) の許容領域の頂点はすべて 01 点である ← これを証明した

なぜこれで十分か？

- (R) は (だいたい) 基準形の線形計画問題
- 基準形の線形計画問題が最適解を持つならば，
  それは許容領域の頂点であるような最適解を持つ
  (第 3 回のスライド p. 69 にある「性質 2」)

目次

何をやってきたのか？ そして 次回やることは？

何をやってきたのか？

割当ゲーム：市場経済の問題のモデル (の 1 つ)

- 割当ゲームのコアを考えたい

割当問題：割当ゲームの特性関数値を計算する問題

- 01 整数線形計画問題として書けるが，その最適値は線形計画緩和と一致
- つまり，線形計画問題として書ける
- つまり，割当ゲームの特性関数値は効率良く計算できる

次回やることは？

- 割当ゲームのコアが常に非空であることを見る
- そのときに，線形計画問題と双対性が活躍する
- それを市場経済の枠組で捉え直す

目次