離散最適化基礎論 第 10 回
特性関数形ゲーム：基礎概念

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 11 日

最終更新：2013 年 1 月 11 日　17:04

概要

目標

特性関数形ゲームに関わる概念を理解する

- 提携形成問題と利得配分問題
- 全体合理性，個人合理性，提携合理性
- コア

ゲームの種類

- **非協力ゲーム** (non-cooperative game)
  - **戦略形ゲーム** (strategic game)
  - **展開形ゲーム** (extensive game)
  - ...
- **協力ゲーム** (cooperative game)
  - **特性関数形ゲーム** (characteristic function game)
  - ...
- ...

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ

協力による利得和の増加 (1)

備忘録：囚人のジレンマ

囚人 1 の利得行列		囚人 2 自白	囚人 2 黙秘
囚人 1	自白	-10	0
囚人 1	黙秘	-20	-5

囚人 2 の利得行列		囚人 2 自白	囚人 2 黙秘
囚人 1	自白	-10	-20
囚人 1	黙秘	0	-5

- **ナッシュ均衡「両者とも自白」** $\rightsquigarrow$ **利得和** $= (-10) + (-10) = -20$
- **協力できて「両者とも黙秘」** $\rightsquigarrow$ **利得和** $= (-5) + (-5) = -10$

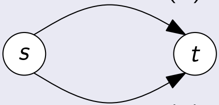
復習：利得和のことを「社会的余剰」(social welfare) **と呼ぶ**

協力による利得和の増加 (2)

備忘録：経路選択ゲーム

- n 人のプレイヤーが s から t へ移動したい (n は偶数であると仮定)
- 各プレイヤーは Route 1 か Route 2 を選択する
- Route 1 の移動時間は n
- Route 2 はの移動時間は，それを k 人選択したとき，k

Route 1: $c(k) = n$



Route 2: $c(k) = k$

- あるナッシュ均衡 $\rightsquigarrow$ 利得和 $= -n^2$
- 社会的最適解 $\rightsquigarrow$ 利得和 $= -\frac{3}{4}n^2$

復習：利得和のことを「社会的余剰」(social welfare) と呼ぶ

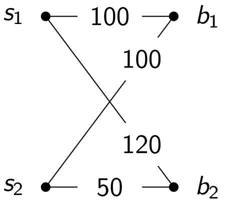
市場経済

2 人の売り手 s_1, s_2：商品を 1 つ持っている

- s_1 は 100 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 100$ 円の利得)
- s_2 は 150 円で入手した
  (p 円で売れば，$p - 150$ 円の利得)

2 人の買い手 b_1, b_2：商品を 1 つ欲しい

- b_1 は
  - s_1 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 250 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$250 - p$ 円の利得)
- b_2 は
  - s_1 の商品を 220 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)



考えたいこと

- 利得和を最大にする取引は？
- そのときの価格は？

タルムードの破産問題

タルムード (Talmud)**：ユダヤ教の古典文書**

次のような遺産配分が書かれている

- **ある人が遺産を残して亡くなったが，**A, B, C **に借金をしていた**
- **借金額：**A **から** 100 **万円，**B **から** 200 **万円，**C **から** 300 **万円**

遺産総額	A **への分配額**	B **への分配額**	C **への分配額**	**配分法**
100	100/3	100/3	100/3	**等分**
200	50	75	75	???
300	50	100	150	**比例配分**

単位：万円

疑問

遺産総額 200 **万円のときの分配法は一体何？**

Aumann **と** Maschler ('85) **が解決** (**特性関数形ゲームを用いた**)

重み付き多数決ゲーム

ある (架空の) 国会における各政党の議席数

	A 党	B 党	C 党	D 党
議席数	100	70	30	10

総議席数 $= 210$，**過半数** $= 106$

過半数となる政党の組合せ

{A, B}, {A, C}, {A, D}, {A, B, C}, {A, B, D}, {A, C, D}, {B, C, D}, {A, B, C, D},

B **と** C **と** D **は「対称」な役割を果たしている**
$\rightsquigarrow$ **議席数はかなり違うのに，法案を通す「力」は同じ**

疑問

どのような協力関係が生まれる？ 「力」をどう測る？

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ

特性関数形ゲームの記述：プレイヤー

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合

例において

- 囚人のジレンマ：囚人 1，囚人 2
- 経路選択ゲーム：n 人のプレイヤー
- 市場経済：2 人の売り手と 2 人の買い手 (計 4 人)
- タルムードの破産問題：債権者 A, B, C
- 重み付き多数決ゲーム：A 党，B 党，C 党，D 党

特性関数形ゲームの記述：提携

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合

提携 (coalition) とは？

N の部分集合のこと

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき，提携をすべて書くと

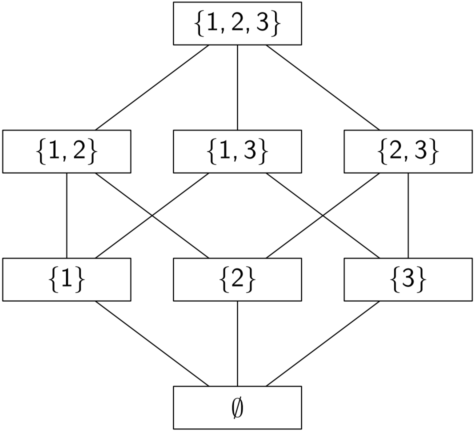
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

提携をすべて集めた集合は N のべき集合 2^N

- $2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

特性関数形ゲームの記述：提携 (ハッセ図による図示)

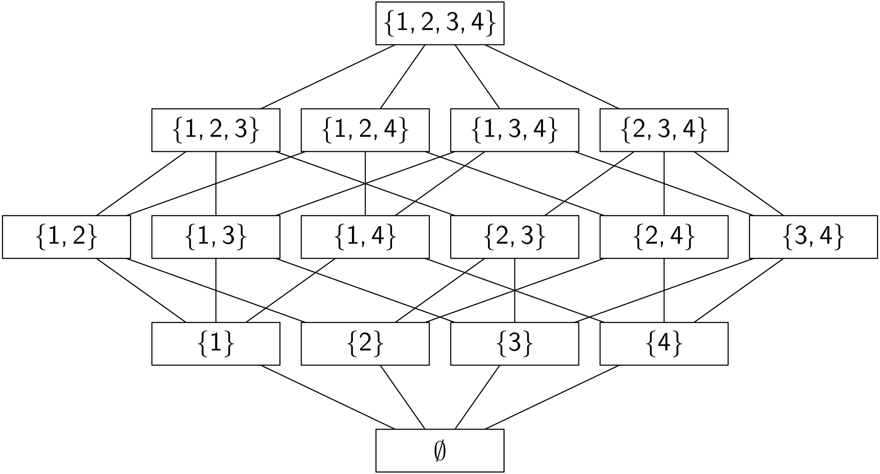
2^N を図示



$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

特性関数形ゲームの記述：提携 (ハッセ図による図示 続)

2^N を図示



$N = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき

特性関数形ゲームの記述：特性関数

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合

特性関数 (characteristic function) とは？

関数 $v \colon 2^N \to \mathbb{R}$ で，$v(\emptyset) = 0$ を満たすもののこと

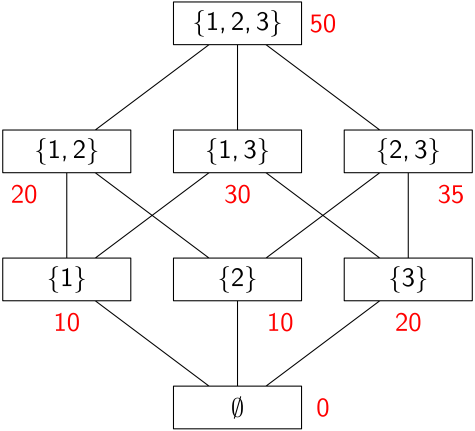
例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

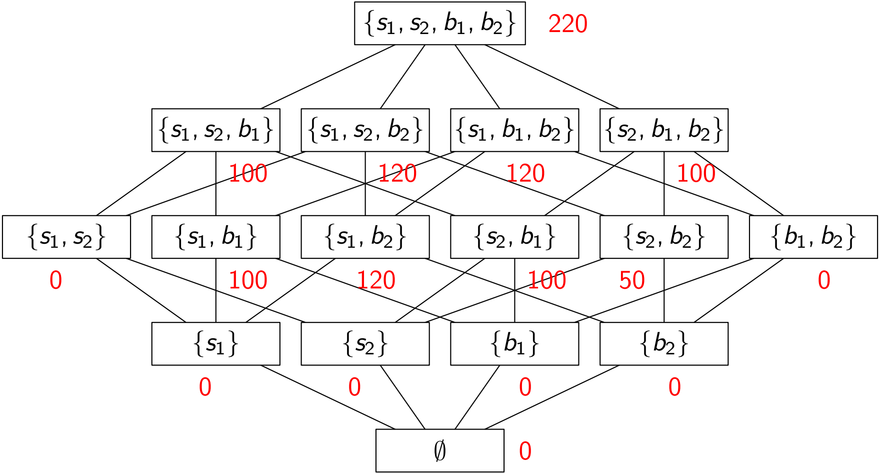
解釈

$v(S)$ は提携 S に属するプレイヤーが協力することで得られる利得和の最大値

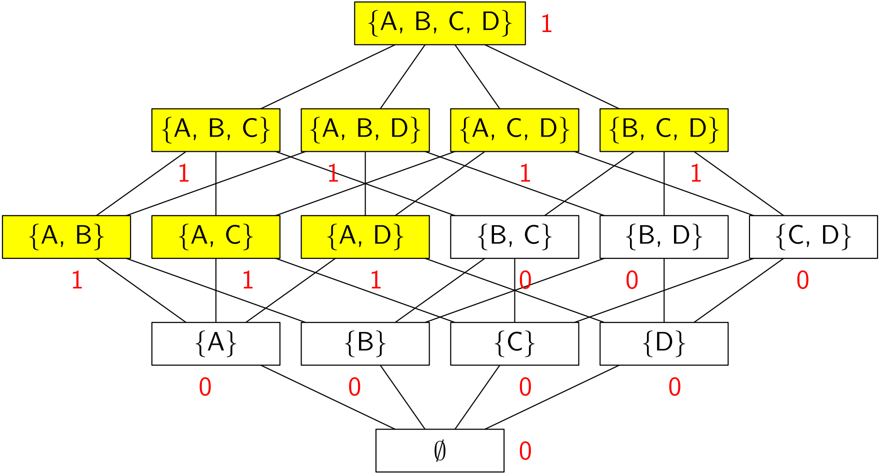
特性関数形ゲームの記述：特性関数 図示



特性関数の例：市場経済


{s1, s2, b1, b2} 220
{s1, s2, b1} 100
{s1, s2, b2} 120
{s1, b1, b2} 120
{s2, b1, b2} 100
{s1, s2} 0
{s1, b1} 100
{s1, b2} 120
{s2, b1} 100
{s2, b2} 50
{b1, b2} 0
{s1} 0
{s2} 0
{b1} 0
{b2} 0
∅ 0

特性関数の例：重み付き多数決ゲーム



特性関数形ゲームで考える問題

プレイヤーの間で協力が可能であるとき，

考える問題 1：提携形成問題

どのような提携が形成されるか？

考える問題 2：利得分配問題

提携の利得和がプレイヤーの間でどう分配されるか？

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ

提携形成問題

特性関数形ゲーム (N, v)

提携形成問題

次の値を最大にするような N **の分割** $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ **を見つけよ**

$$v(S_1) + v(S_2) + \cdots + v(S_k)$$

復習：$\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ **が** N **の分割であるとは**

- **任意の** $i \in \{1, \ldots, k\}$ **に対して，** $S_i \subseteq N$
- **任意の異なる** $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ **に対して，** $S_i \cap S_j = \emptyset$
- $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k = N$

提携形成問題：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき，次の特性関数を考える

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

可能な分割と利得和

分割	利得和
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	$10+10+20 = 40$
$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$	$20 + 20 = 40$
$\{\{1, 3\}, \{2\}\}$	$30 + 10 = 40$
$\{\{2, 3\}, \{1\}\}$	$35 + 10 = 45$
$\{\{1, 2, 3\}\}$	50

よって，最適値は 50 で，最適解は $\{\{1, 2, 3\}\}$

優加法性

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法性とは？

(N, v) が**優加法的ゲーム**であるとは，任意の提携 $S, T \subseteq N$ に対して

$$S \cap T = \emptyset \text{ ならば } v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

を満たすこと

優加法的ゲームの性質

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームの性質

(N, v) **が優加法的ゲーム** $\Rightarrow$ **任意の提携** $S, T, U \subseteq N$ **に対して**

$$\begin{matrix} S \cap T = \emptyset \\ S \cap U = \emptyset \\ T \cap U = \emptyset \end{matrix} \quad \text{ならば} \quad v(S) + v(T) + v(U) \leq v(S \cup T \cup U)$$

証明：

- $S \cap T = \emptyset$ **なので，優加法性より，** $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$
- $S \cap U = T \cap U = \emptyset$ **なので，** $(S \cup T) \cap U = \emptyset$
- **よって，優加法性より，** $v(S \cup T) + v(U) \leq v(S \cup T \cup U)$
- **したがって，**
  $v(S) + v(T) + v(U) \leq v(S \cup T) + v(U) \leq v(S \cup T \cup U)$ $\square$

優加法的ゲームの性質 (2)

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームの性質 (2)：同じようにして次が証明できる

(N, v) **が優加法的ゲーム** $\Rightarrow$ N **の任意の分割** $\{S_1, \ldots, S_k\}$ **に対して**

$$v(S_1) + \cdots + v(S_k) \leq v(N)$$

証明：演習問題

優加法的ゲームと提携形成問題

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームでは全体提携が形成される

(N, v) **が優加法的ゲーム** $\Rightarrow \{N\}$ **は提携形成問題の最適解**

証明：N **の分割** $\{S_1, \ldots, S_k\}$ **が提携形成問題の最適解であるとする**

- **最適性から，**$v(S_1) + \cdots + v(S_k) \geq v(N)$
- **一方，優加法性から，**$v(S_1) + \cdots + v(S_k) \leq v(N)$
- $\therefore v(S_1) + \cdots + v(S_k) = v(N)$
- $\therefore \{N\}$ **は提携形成問題の最適解** $\square$

注意

- **以後，考える特性関数形ゲームはすべて優加法的である**
- $\therefore$ **プレイヤー全体が** 1 **つの提携を形成すると仮定して進める**

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ

利得和の分配

特性関数形ゲーム (N, v)

利得ベクトルとは？

(N, v) の**利得ベクトル**とはベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ のこと

解釈

x_i は，分配後にプレイヤー i が得る利得

利得分配問題で考えること

どのような利得ベクトルであれば，協力する意味を損なわないか

つまり，利得ベクトルが満たすべき性質を議論したい

全体合理性

特性関数形ゲーム (N, v)，利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$

全体合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ に対する次の条件を全体合理性と呼ぶ

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

解釈

- **各プレイヤーに分配した利得を足すと，$v(N)$ になる**
- **$v(N)$ を分割して，利得ベクトル x を作る**

個人合理性

特性関数形ゲーム (N, v)**，利得ベクトル** $x \in \mathbb{R}^N$

個人合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ **に対する次の条件を個人合理性と呼ぶ**

$$\text{任意のプレイヤー } i \in N \text{ に対して，} \quad x_i \geq v(\{i\})$$

解釈

- **各プレイヤーに対して分配した利得は，そのプレイヤーが単独で行動したときの利得以上である**
- $x_i < v(\{i\})$ **となるプレイヤー** i **は** x **に対して不満を持つ**

個人合理性：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

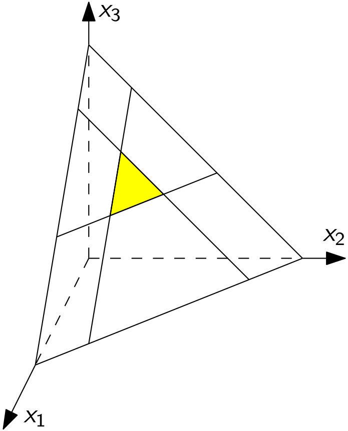
$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$

個人合理性：例 図示 (1)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

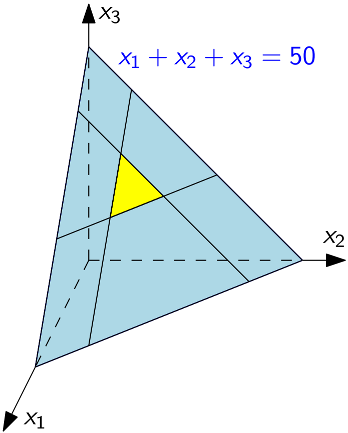
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (2)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

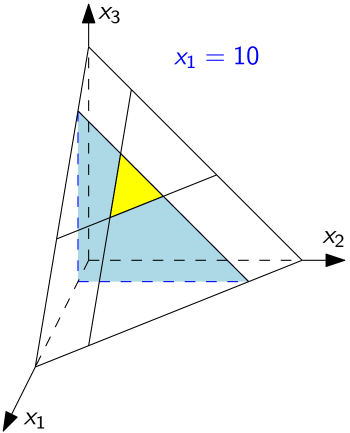
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (3)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

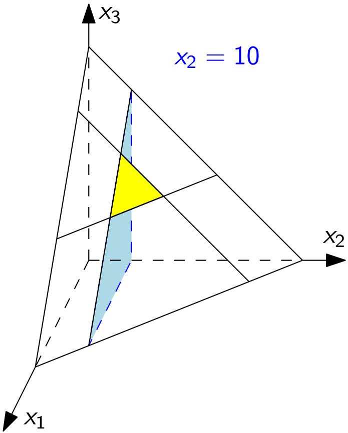
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (4)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

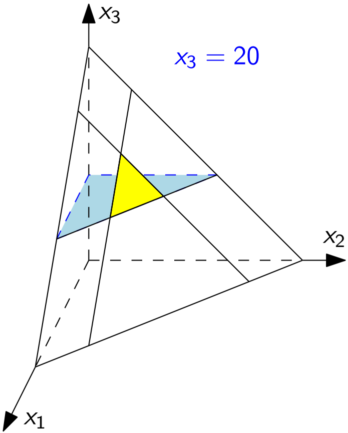
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (5)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

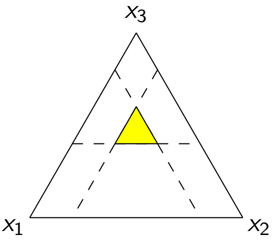
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (6)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



2 次元に図示

個人合理性と優加法的ゲーム

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームの性質 (3)

(N, v) **が優加法的** $\Rightarrow$
全体合理性と個人合理性を満たす利得ベクトルが存在

証明：実際にそのような利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ **を次のように構成**
$(N = \{1, \ldots, n\}$ **とする**$)$

$$x_i = \begin{cases} v(\{i\}) & (i \in \{1, \ldots, n-1\}) \\ v(N) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}) & (i = n) \end{cases}$$

個人合理性と優加法的ゲーム：証明の続き

- **全体合理性を満たすことの確認**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) + v(N) - \sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}) = v(N)$$

- **個人合理性を満たすことの確認**
  - $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **のとき**

$$x_i = v(\{i\}) \geq v(\{i\})$$

  - $i = n$ **のとき：優加法性から** $v(N) \geq \sum_{j=1}^{n} v(\{j\})$ **となるので**

$$x_n = v(N) - \sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}) \geq v(\{n\})$$

- **よって，x は全体合理性と個人合理性を満たす** □

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ

提携合理性

特性関数形ゲーム (N, v)，利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$

提携合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ に対する次の条件を**提携合理性**と呼ぶ

$$\text{任意の提携 } S \subseteq N \text{ に対して，} \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

解釈

- 各提携に対して分配した利得和は，その提携が単独で行動したときの利得和以上である
- $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$ となる提携 S は x に対して不満を持つ

注：x が提携合理性を満たす $\Rightarrow$ x が個人合理性を満たす

特性関数形ゲームのコア

特性関数形ゲーム (N, v)

コアとは？

(N, v) の**コア**とは，全体合理性，個人合理性，提携合理性を満たす利得ベクトル全体の集合

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ \text{任意の } S \subseteq N \text{ に対して } \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \end{array} \right\}$$

- コアは特性関数形ゲームの解の 1 つであると考えられている (協力ゲームの解概念)
- コアは凸多面体 (有限個の線形不等式で記述されている)
- 優加法的ゲームでもコアは空かもしれない (演習問題)

コア：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

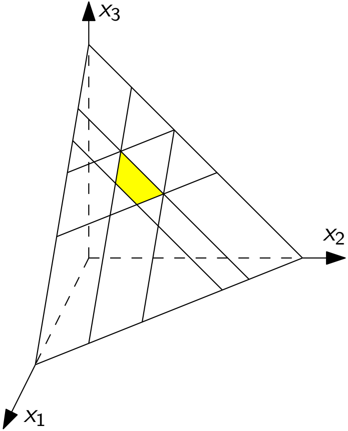
この特性関数形ゲームのコアは？

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$

コア：例 図示 (1)

この特性関数形ゲームのコアは？

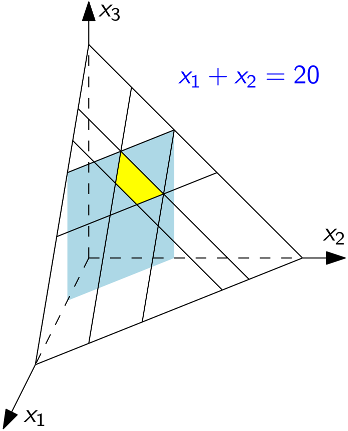
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



コア：例 図示 (2)

この特性関数形ゲームのコアは？

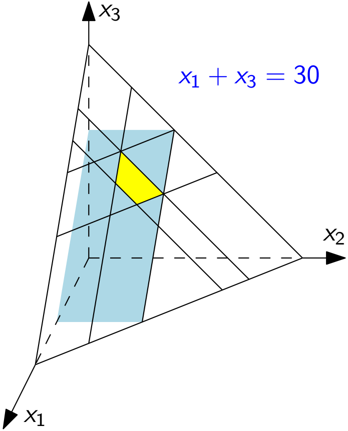
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



コア：例 図示 (3)

この特性関数形ゲームのコアは？

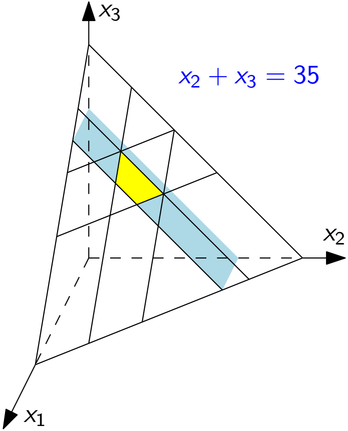
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



コア：例 図示 (4)

この特性関数形ゲームのコアは？

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



タルムードの破産問題 (再掲)

タルムード (Talmud)**：ユダヤ教の古典文書**

次のような遺産配分が書かれている

- **ある人が遺産を残して亡くなったが，**A, B, C **に借金をしていた**
- **借金額：**A **から** 100 **万円，**B **から** 200 **万円，**C **から** 300 **万円**

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額	配分法
100	100/3	100/3	100/3	等分
200	50	75	75	???
300	50	100	150	比例配分

単位：万円

疑問

遺産総額 200 **万円のときの分配法は一体何？**

コアを通して，この疑問を考察してみる

タルムードの破産問題：遺産総額 100 万円の場合

分配規則

借金額：A **から** 100 **万円，**B **から** 200 **万円，**C **から** 300 **万円**

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額
100	100/3	100/3	100/3

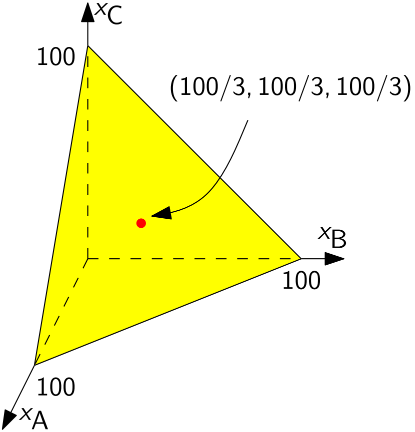
特性関数を次のように作る

$$v(S) = \max\{\,\textbf{遺産総額} - S\ \textbf{に属さないプレイヤーからの借金総額}, 0\}$$

特性関数の値

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{\mathrm{A}\}) = 0$
- $v(\{\mathrm{B}\}) = 0$
- $v(\{\mathrm{C}\}) = 0$
- $v(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}) = 0$
- $v(\{\mathrm{A}, \mathrm{C}\}) = 0$
- $v(\{\mathrm{B}, \mathrm{C}\}) = 0$
- $v(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}) = 100$

タルムードの破産問題：遺産総額 100 万円の場合 (コアの図示)



コアの中心 (重心) を使って分配を行っている

タルムードの破産問題：遺産総額 300 万円の場合

分配規則

借金額：A から 100 万円，B から 200 万円，C から 300 万円

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額
300	50	100	150

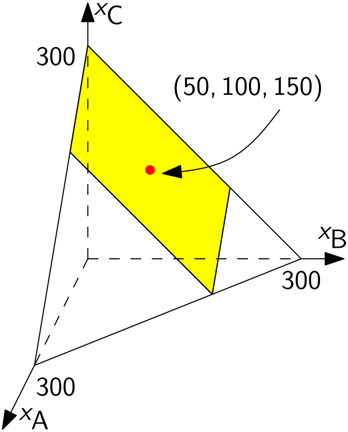
特性関数を次のように作る

$$v(S) = \max\{\,\text{遺産総額} - S\ \text{に属さないプレイヤーからの借金総額}, 0\}$$

特性関数の値

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{A\}) = 0$
- $v(\{B\}) = 0$
- $v(\{C\}) = 0$
- $v(\{A, B\}) = 0$
- $v(\{A, C\}) = 100$
- $v(\{B, C\}) = 200$
- $v(\{A, B, C\}) = 300$

タルムードの破産問題：遺産総額 300 万円の場合 (コアの図示)



コアの中心 (重心) を使って分配を行っている

タルムードの破産問題：遺産総額 200 万円の場合

分配規則

借金額： A **から** 100 **万円，** B **から** 200 **万円，** C **から** 300 **万円**

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額
200	50	75	75

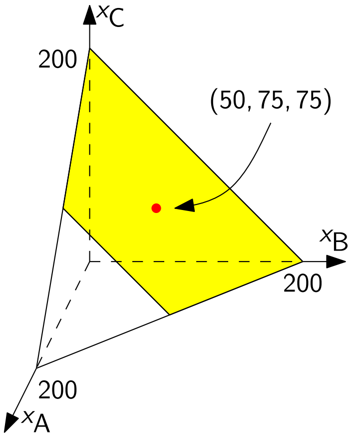
特性関数を次のように作る

$$v(S) = \max\{\text{遺産総額} - S\text{ に属さないプレイヤーからの借金総額}, 0\}$$

特性関数の値

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{A\}) = 0$
- $v(\{B\}) = 0$
- $v(\{C\}) = 0$
- $v(\{A, B\}) = 0$
- $v(\{A, C\}) = 0$
- $v(\{B, C\}) = 100$
- $v(\{A, B, C\}) = 200$

タルムードの破産問題：遺産総額 200 万円の場合 (コアの図示)



コアの中心 (重心) を使って分配を行っている

タルムードの破産問題の解釈 (Aumann, Maschler '85)

より一般的に

- 特性関数の構成法
  - タルムードの他の箇所に書いてある分配法を基にしている

Equal Division of the Contested Sum

Two hold a garment; ... one claims it all, the other claims half. ... Then the one is awarded 3/4, the other 1/4.

- 分配法の解釈
  - 特性関数形ゲームの理論における仁 (nucleolus) に一致
  - 仁とは ?: 提携の不満を辞書的に最小化した利得ベクトル
  - 性質 1：コアが非空ならば，仁は必ずコアの要素である
  - 性質 2：仁がいつもコアの重心であるとは限らない

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ

今日のまとめ

今日やったこと

特性関数形ゲームに関わる概念を理解する

- 提携形成問題と利得配分問題
- 全体合理性，個人合理性，提携合理性
- コア

次回やりたいこと

市場経済を特性関数形ゲームのコアから眺めること

- 線形計画法が再び登場

目次

1. 特性関数形ゲーム
2. 特性関数形ゲームの記述
3. 提携形成問題
4. 利得分配問題
5. 利得分配問題：特性関数形ゲームのコア
6. 今日のまとめ