離散最適化基礎論 第 7 回
展開形ゲーム：離散構造とアルゴリズム (1)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 11 月 16 日

最終更新：2012 年 11 月 16 日　06:49

概要

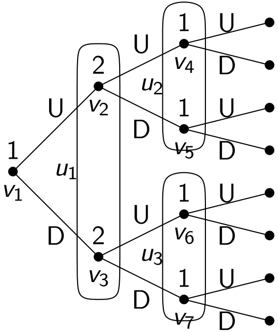
目標

展開形ゲームが何であるのか，理解する

- 展開形ゲームの構成要素
- 混合戦略と行動戦略
- 完全記憶展開形ゲームのナッシュ均衡計算法：準備

目次

例：戦略形ゲームへの変換 (標準化)



戦略形ゲームに変換したとき

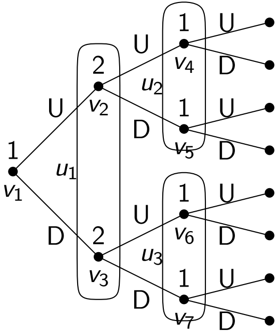
- **プレイヤー 1 の戦略：(v_1, u_2, u_3) として 8 つ**
  - (U, U, U), (U, U, D), (U, D, U), (U, D, D), (D, U, U), (D, U, D), (D, D, U), (D, D, D)
- **プレイヤー 2 の戦略：u_1 において 2 つ**
  - U, D

着眼点

プレイヤー 1 が v_1 で U を選んだら，プレイヤー 1 は u_3 で何を選んでも利得は変わらない

$\rightsquigarrow$ **以前の戦略の選択により辿り着けなくなる情報集合における戦略の選択を同一視してよい**

例：戦略形ゲームへの変換 (標準化)



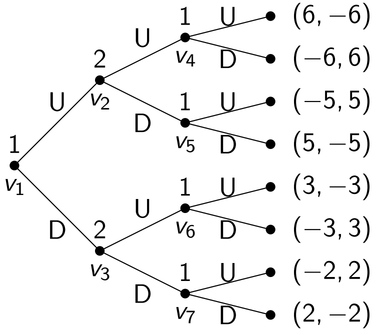
簡約化

- **プレイヤー 1 の戦略 (簡約後)：** (v_1, u_2, u_3) **として 4 つ**
  - (U, U, *), (U, D, *), (D, *, U), (D, *, D)
- **プレイヤー 2 の戦略：** u_1 **において 2 つ**
  - U, D

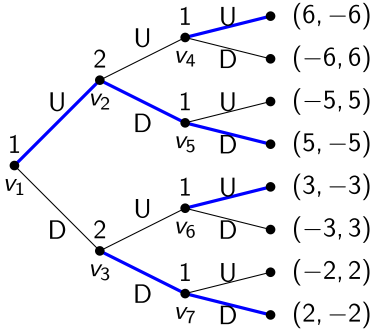
これにより，混合ナッシュ均衡の計算も簡素化される

目次

考える例：2 人ゼロ和展開形ゲーム



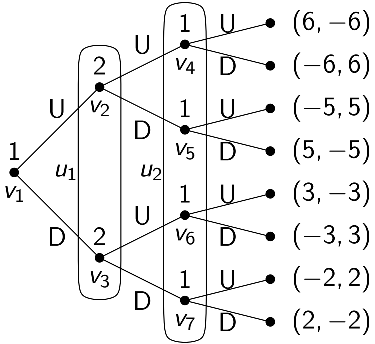
考える例：2 人ゼロ和展開形ゲーム



これは完全情報ゲームなので，
後ろ向き帰納法でナッシュ均衡を 1 つ見つけられる

プレイヤー 1 の利得は 5

情報分割が最も粗くなった場合

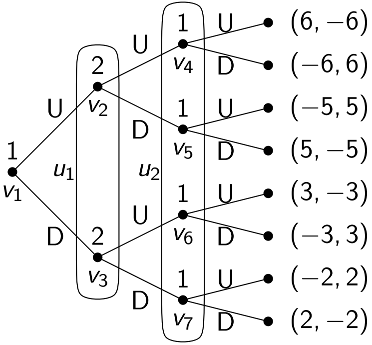


混合ナッシュ均衡をどう計算したらよいか？ $\rightsquigarrow$ 標準化する

- **プレイヤー** 1 **の戦略の選択：**v_1 **で** U **か** D**，**u_2 **で** U **か** D
- **プレイヤー** 2 **の戦略の選択：**u_1 **で** U **か** D

注：これは不完全記憶ゲーム

情報分割が最も粗くなった場合 (2)



P1 の利得行列		P2 (u_1)	
		U	D
P1 (v_1, u_2)	(U, U)	6	-5
	(U, D)	-6	5
	(D, U)	3	-2
	(D, D)	-3	2

P2 の利得行列		P2 (u_1)	
		U	D
P1 (v_1, u_2)	(U, U)	-6	5
	(U, D)	6	-5
	(D, U)	-3	2
	(D, D)	3	-2

情報分割が最も粗くなった場合 (3)：混合ナッシュ均衡の計算

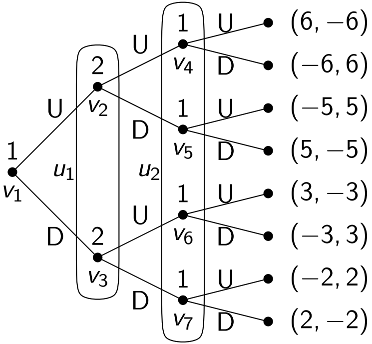
P1 の混合戦略 $x \in \mathbb{R}^4$，P2 の混合戦略 $y \in \mathbb{R}^2$ の組が混合ナッシュ均衡 $\Leftrightarrow$

次を満たす $u, v \in \mathbb{R}$ が存在

1. $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
2. $u \geq 6y_1 - 5y_2,\ u \geq -6y_1 + 5y_2,\ u \geq 3y_1 - 2y_2,\ u \geq -3y_1 + 2y_2$
3. $y_1, y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq -6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4,\ v \geq 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 2x_4$
5. $x_1(u - 6y_1 + 5y_2) + x_2(u + 6y_1 - 5y_2) + x_3(u - 3y_1 + 2y_2) + x_4(u + 3y_1 - 2y_2) = 0$
6. $y_1(v + 6x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4) + y_2(v - 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4) = 0$

$x = (0, 5/16, 11/16, 0),\ y = (7/16, 9/16),\ u = v = 0$ はこれを満たす

情報分割が最も粗くなった場合 (4)：計算されたナッシュ均衡



プレイヤー 1 は

- (U, D) **を確率** 5/16 **で，**
- (D, U) **を確率** 11/16 **で**

選択する

プレイヤー 2 は

- U **を確率** 7/16 **で，**
- D **を確率** 9/16 **で**

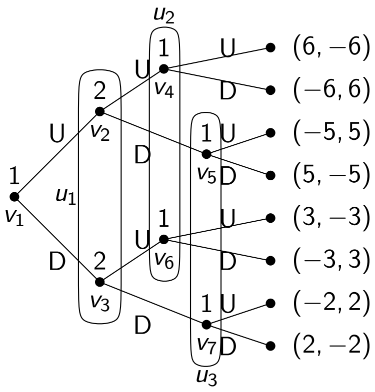
選択する

プレイヤー 1 の期待利得は 0

注意

- **これは行動戦略に変換できない**
- **情報分割が粗くなって，プレイヤー** 1 **の利得が減った**

情報分割を少し細かくした場合

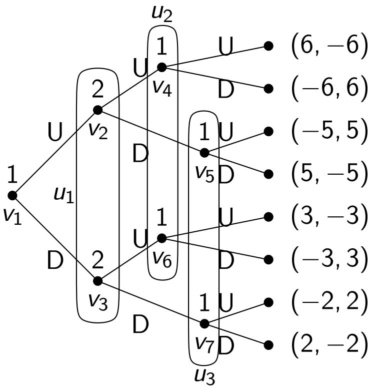


混合ナッシュ均衡をどう計算したらよいか？ $\rightsquigarrow$ **標準化する**

- P1 **の戦略の選択：** v_1 **で** U **か** D**，** u_2 **で** U **か** D**，** u_3 **で** U **か** D
- P2 **の戦略の選択：** u_1 **で** U **か** D

注：これは不完全記憶ゲーム

情報分割を少し細かくした場合 (2)



P1 の利得行列		P2 (u_1) U	D
	(v_1, u_2, u_3)		
	(U, U, U)	6	-5
	(U, U, D)	6	5
	(U, D, U)	-6	-5
P1	(U, D, D)	-6	5
	(D, U, U)	3	-2
	(D, U, D)	3	2
	(D, D, U)	-3	-2
	(D, D, D)	-3	2

P2 の利得行列はこれの符号を反転させたもの

情報分割を少し細かくした場合 (3)：混合ナッシュ均衡の計算

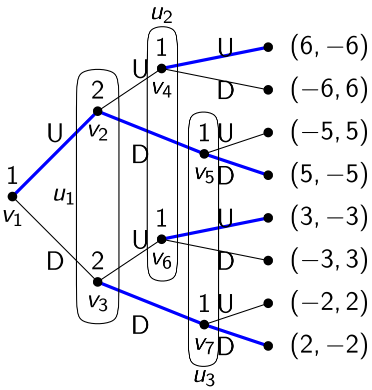
P1 の混合戦略 $x \in \mathbb{R}^8$，P2 の混合戦略 $y \in \mathbb{R}^2$ の組が混合ナッシュ均衡 $\Leftrightarrow$

次を満たす $u, v \in \mathbb{R}$ が存在

1. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 1$
2. $u \geq 6y_1 - 5y_2,\ u \geq 6y_1 + 5y_2,\ u \geq -6y_1 - 5y_2,\ u \geq -6y_1 + 5y_2,$
   $u \geq 3y_1 - 2y_2,\ u \geq 3y_1 + 2y_2,\ u \geq -3y_1 - 2y_2,\ u \geq -3y_1 + 2y_2$
3. $y_1, y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq -6x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 6x_4 - 3x_5 - 3x_6 + 3x_7 + 3x_8,$
   $v \geq 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6 + 2x_7 - 2x_8$
5. $x_1(u - 6y_1 + 5y_2) + x_2(u - 6y_1 - 5y_2) + x_3(u + 6y_1 + 5y_2) + x_4(u + 6y_1 - 5y_2) + x_5(u - 3y_1 + 2y_2) + x_6(u - 3y_1 - 2y_2) + x_7(u + 3y_1 + 2y_2) + x_8(u + 3y_1 - 2y_2) = 0$
6. $y_1(v + 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 3x_6 - 3x_7 - 3x_8) + y_2(v - 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 + 2x_8) = 0$

$x = (0, 1, 0, 0, 0, 0),\ y = (0, 1),\ u = 5,\ v = -5$ **はこれを満たす**

情報分割が少し細かくした場合 (4)：計算されたナッシュ均衡



プレイヤー 1 は

- (U, U, D) **を確率** 1 **で**

選択する

プレイヤー 2 は

- D **を確率** 1 **で**

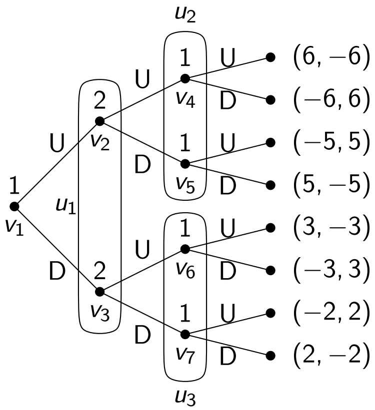
選択する

プレイヤー 1 の期待利得は 5

注意

- **これは行動戦略に変換できる (不完全記憶ゲームだけども)**

情報分割を別の方法で細かくする

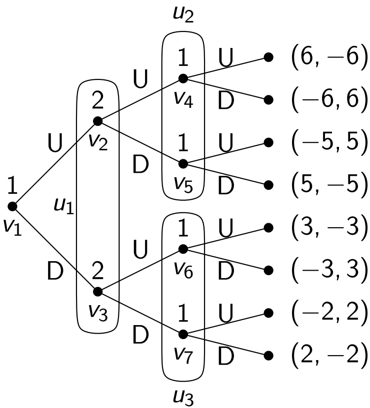


混合ナッシュ均衡をどう計算したらよいか？ $\rightsquigarrow$ **標準化する**

- P1 **の戦略の選択：** v_1 **で** U **か** D**，** u_2 **で** U **か** D**，** u_3 **で** U **か** D
- P2 **の戦略の選択：** u_1 **で** U **か** D

注：これは完全記憶ゲーム

情報分割を別の方法で細かくする (2)



P1 の利得行列		P2 (u_1) U	D
	(v_1, u_2, u_3)		
	(U, U, *)	6	−5
P1	(U, D, *)	−6	5
	(D, *, U)	3	−2
	(D, *, D)	−3	2

P2 の利得行列はこれの符号を反転させたもの

情報分割を別の方法で細かくする (3)：混合ナッシュ均衡の計算

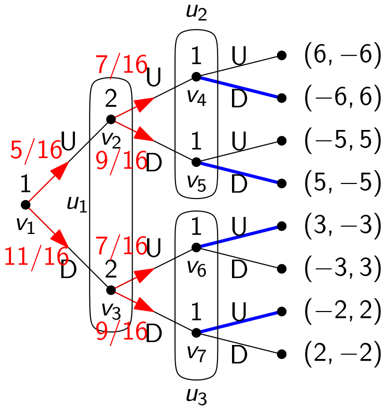
P1 の混合戦略 $x \in \mathbb{R}^4$，P2 の混合戦略 $y \in \mathbb{R}^2$ の組が混合ナッシュ均衡 $\Leftrightarrow$

次を満たす $u, v \in \mathbb{R}$ が存在

1. $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
2. $u \geq 6y_1 - 5y_2,\ u \geq -6y_1 + 5y_2,\ u \geq 3y_1 - 2y_2,\ u \geq -3y_1 + 2y_2$
3. $y_1, y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq -6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4,\ v \geq 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 2x_4$
5. $x_1(u - 6y_1 + 5y_2) + x_2(u + 6y_1 - 5y_2) + x_3(u - 3y_1 + 2y_2) + x_4(u + 3y_1 - 2y_2) = 0$
6. $y_1(v + 6x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4) + y_2(v - 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4) = 0$

$x = (0, 5/16, 11/16, 0),\ y = (7/16, 9/16),\ u = 3/16,\ v = -3/16$ **は**
これを満たす

情報分割を別の方法で細かくする (4)：計算されたナッシュ均衡



プレイヤー 1 **は**

- (U, D, *) **を確率** 5/16 **で，**
- (D, *, U) **を確率** 11/16 **で**

選択する

プレイヤー 2 **は**

- U **を確率** 7/16 **で，**
- D **を確率** 9/16 **で**

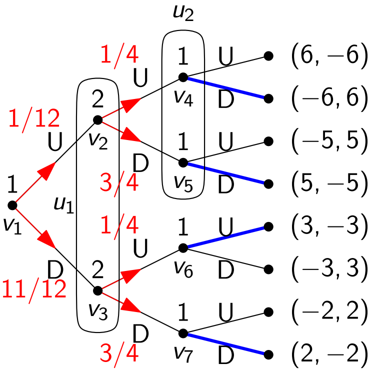
選択する

プレイヤー 1 **の期待利得は** 3/16

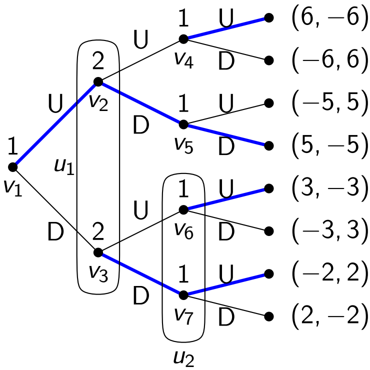
注意

- **これは行動戦略に変換できる (完全記憶ゲームなので，常に可能)**

他の情報分割 (1)：同じように計算してみると

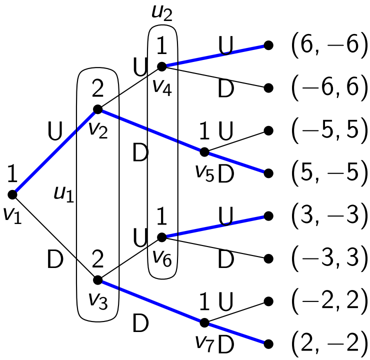


P1 **の期待利得** $= 9/4$

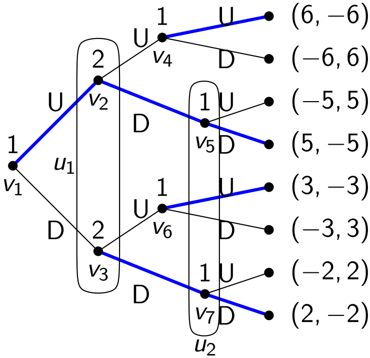


P1 **の期待利得** $= 5$

他の情報分割 (2)：同じように計算してみると

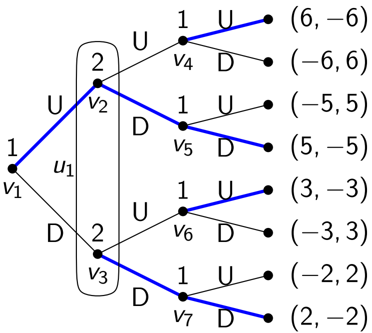


P1 の期待利得 $= 5$

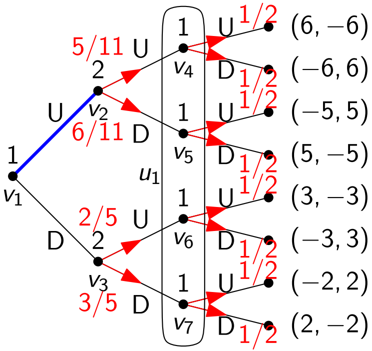


P1 の期待利得 $= 5$

他の情報分割 (3)：同じように計算してみると

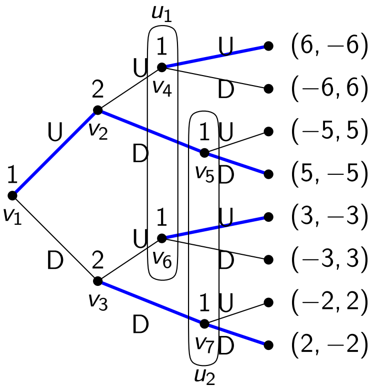


P1 の期待利得 $= 5$

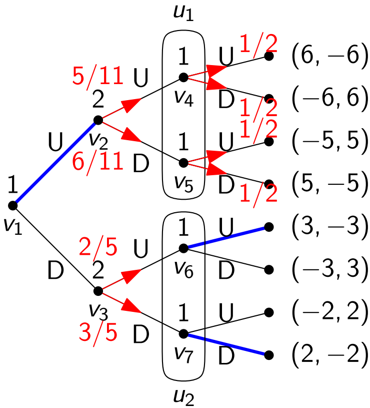


P1 の期待利得 $= 0$

他の情報分割 (4)：同じように計算してみると

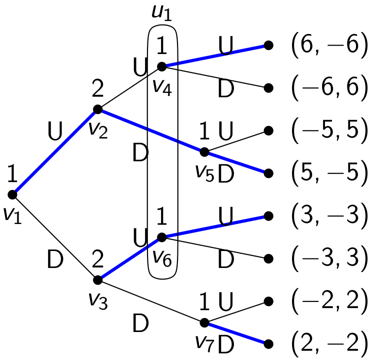


P1 の期待利得 $= 5$

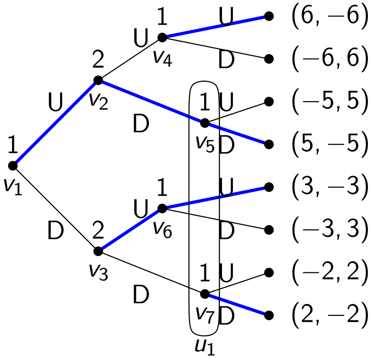


P1 の期待利得 $= 0$

他の情報分割 (5)：同じように計算してみると

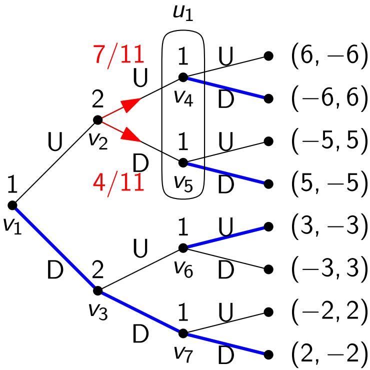


P1 の期待利得 $= 5$

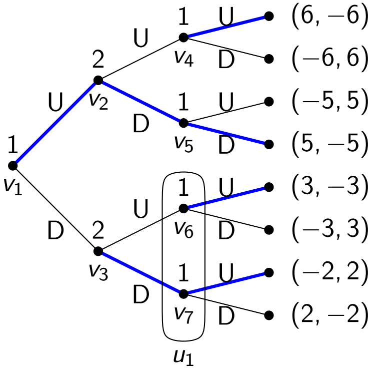


P1 の期待利得 $= 5$

他の情報分割 (6)：同じように計算してみると

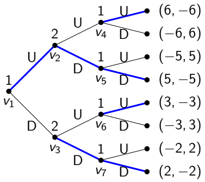


P1 の期待利得 $= 2$

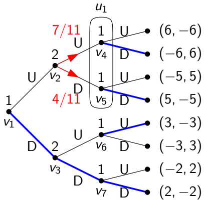


P1 の期待利得 $= 5$

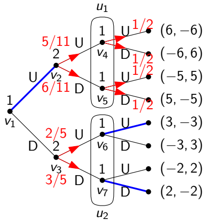
情報分割の粗さと期待利得



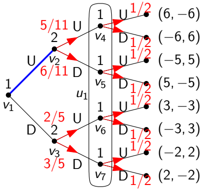
P1 の期待利得 $= 5$



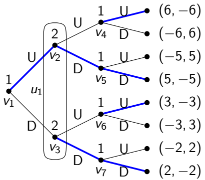
P1 の期待利得 $= 2$



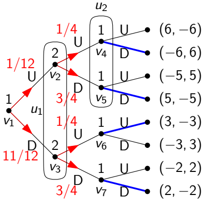
P1 の期待利得 $= 0$



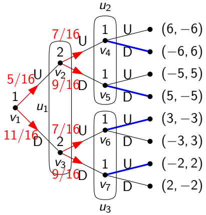
P1 の期待利得 $= 0$



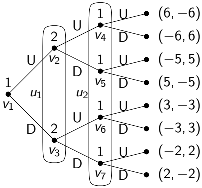
P1 の期待利得 $= 5$



P1 の期待利得 $= 9/4$



P1 の期待利得 $= 3/16$



P1 の期待利得 $= 0$

情報分割の粗さと期待利得：観察

G_1, G_2：情報分割だけ異なる 2 つの 2 人ゼロ和展開形ゲーム

- G_1 での P1 の情報分割が G_2 での P1 の情報分割より細かく，G_1 での P2 の情報分割と G_2 での P2 の情報分割が同じ

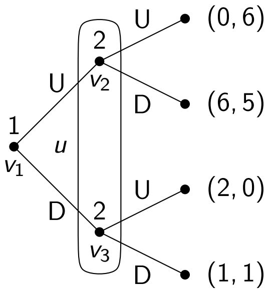
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$G_1$ でのナッシュ均衡における P1 の期待利得}} \geq \boxed{\text{G_2 でのナッシュ均衡における P1 の期待利得}}$

- G_1 での P2 の情報分割が G_2 での P2 の情報分割より細かく，G_1 での P1 の情報分割と G_2 での P1 の情報分割が同じ

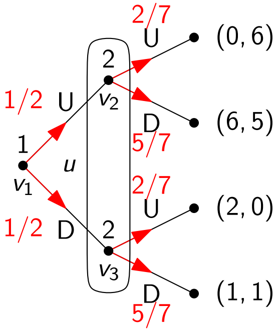
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$G_1$ でのナッシュ均衡における P2 の期待利得}} \geq \boxed{\text{G_2 でのナッシュ均衡における P2 の期待利得}}$

- この関係は偶然手番のない一般の 2 人ゼロ和展開形ゲームで成立する
  - しかし，ゼロ和でないときは成立しないかもしれない

ゼロ和ではない例 (1)



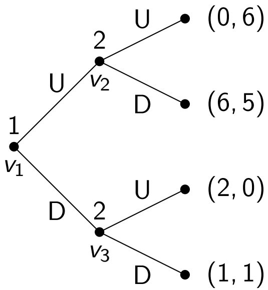
ゼロ和ではない例 (2)



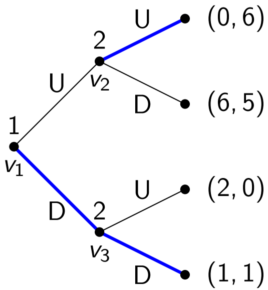
この均衡において

- P1 **の期待利得は** 12/7
- P2 **の期待利得は** 3

ゼロ和ではない例：情報分割を細かくする (1)



ゼロ和ではない例：情報分割を細かくする (2)

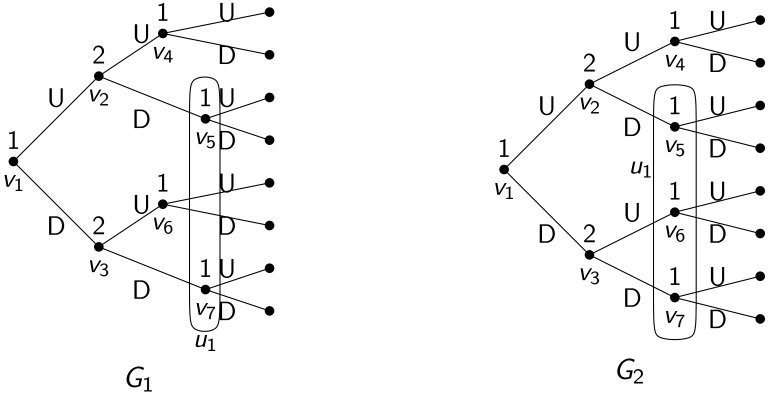


この均衡において

- P1 **の期待利得は** 1 **(先ほどは** 12/7)
- P2 **の期待利得は** 1 **(先ほどは** 3)

情報分割の細かさ：例 1

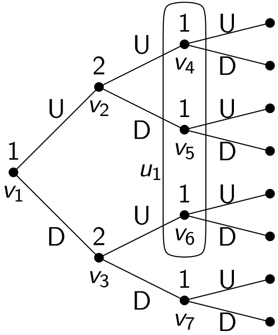
次の G_1 と G_2 がゼロ和ゲームであるとすると，



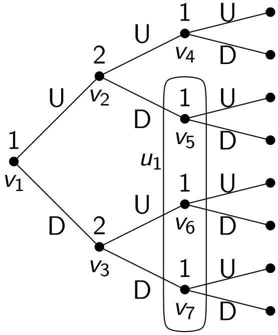
G_1 でのナッシュ均衡における P1 の期待利得	$\geq$	G_2 でのナッシュ均衡における P1 の期待利得

情報分割の細かさ：例 2

次の G_1 と G_2 がゼロ和ゲームであるとすると，



G_1



G_2

この情報だけから「G_1 でのナッシュ均衡における P1 の期待利得」と「G_2 でのナッシュ均衡における P1 の期待利得」は比較できない

目次

完全記憶展開形ゲームにおける混合ナッシュ均衡の計算

n 個情報集合があり，各情報集合で選択肢が 2 つあるとき

標準化して，戦略形ゲームと見なすと

戦略数 $\approx 2^n$

それを簡約化して，戦略形ゲームと見なすと

まだ，戦略数が n に関して指数関数的に増加するかもしれない

行動戦略を考えて，行動戦略での均衡を考えようとすると

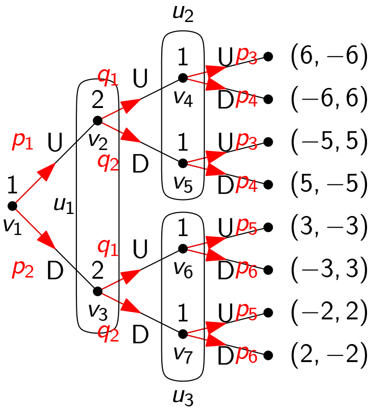
戦略の数 $\approx n$

$\rightsquigarrow$ 行動戦略を考えることが計算としては都合がよさそう

注意

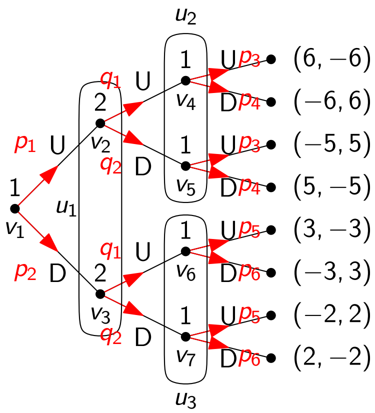
不完全記憶ゲームでは行動戦略でのナッシュ均衡が存在しないかもしれないので，これはできない

例



- $p_1 = \Pr[v_1$ で P1 が U を選択$]$
- $p_2 = \Pr[v_1$ で P1 が D を選択$]$
- $p_3 = \Pr[u_2$ で P1 が U を選択$]$
- $p_4 = \Pr[u_2$ で P1 が D を選択$]$
- $p_5 = \Pr[u_3$ で P1 が U を選択$]$
- $p_6 = \Pr[u_3$ で P1 が D を選択$]$
- $q_1 = \Pr[u_1$ で P2 が U を選択$]$
- $q_2 = \Pr[u_1$ で P2 が D を選択$]$

期待利得の計算



P1 の利得行列		P2 (u_1) U	D
	(v_1, u_2, u_3)		
	(U, U, *)	6	−5
P1	(U, D, *)	−6	5
	(D, *, U)	3	−2
	(D, *, D)	−3	2

- Pr[P1 が (U, U, *) を選択] $= p_1 p_3$
- Pr[P1 が (U, D, *) を選択] $= p_1 p_4$
- Pr[P1 が (D, *, U) を選択] $= p_2 p_5$
- Pr[P1 が (D, *, D) を選択] $= p_2 p_6$

$$\begin{aligned} \text{P1 の期待利得} &= 6p_1p_3q_1 - 6p_1p_4q_1 - 5p_1p_3q_2 + 5p_1p_4q_2 \\ &\quad +3p_2p_5q_1 - 3p_2p_6q_1 - 2p_2p_5q_2 + 2p_2p_6q_2 \\ \text{P2 の期待利得} &= -\text{P1 の期待利得} \end{aligned}$$

プレイヤー 1 の最適反応

プレイヤー 1 が解く最適化問題

q_1, q_2 は定数，$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ は変数

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximize} & 6p_1p_3q_1 - 6p_1p_4q_1 - 5p_1p_3q_2 + 5p_1p_4q_2 \\
& +3p_2p_5q_1 - 3p_2p_6q_1 - 2p_2p_5q_2 + 2p_2p_6q_2 \\
\text{subject to} & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1, \\
& p_3 \geq 0, p_4 \geq 0, p_3 + p_4 = 1, \\
& p_5 \geq 0, p_6 \geq 0, p_5 + p_6 = 1
\end{array}
$$

目的関数は 2 次関数であり，厄介

- 一般には，より高次の多項式関数になりうる
- 高次の多項式関数は最適化が難しい

次回行うこと

- 完全記憶ゲームに対する別の表現を考えて，期待利得が (双) 線形関数になるようにする
- $\rightsquigarrow$ 逐次形表現
- 2 人ゼロ和完全記憶ゲームの混合ナッシュ均衡が線形計画法を用いることで計算できるようになる

目次

今日のまとめ

今日やったこと

展開形ゲームについての理解を深める

- 戦略形ゲーム表現の簡約化
- 情報構造と情報の価値
- 完全記憶展開形ゲームのナッシュ均衡計算法：準備

次回

- 逐次形表現を用いた，完全記憶 2 人ゼロ和展開形ゲームにおけるナッシュ均衡計算法

注意：次回は 12 月 7 日

目次