離散最適化基礎論 第 5 回
戦略形 2 人ゲーム：離散構造とアルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 11 月 2 日

最終更新：2012 年 11 月 2 日　16:29

概要

目標

戦略形 2 人ゲームの混合ナッシュ均衡計算法を理解する

- Lemke–Howson 法

目次

戦略形 2 人ゼロ和ゲーム

$(\{1,2\},\{A_1,A_2\},\{A,B\})$：**戦略形 2 人ゲーム**
(**双行列ゲーム**, bimatrix game)

- $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- **プレイヤー 1 の混合戦略**：$x \in \mathbb{R}^m$
  $$x \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$
- **プレイヤー 2 の混合戦略**：$y \in \mathbb{R}^n$
  $$y \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

目標

このゲームの混合ナッシュ均衡を 1 つ計算する

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$
2. $u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$
3. $y \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
4. $v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - a_{i\bullet} y\right) = 0$
6. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \left(v - b_{\bullet j}^\top x\right) = 0$

注：ここまでの議論は，ゲームがゼロ和であることを使っていない

例：男女の争い

男女の争い

男性の利得行列		女性 S	女性 C
男性	S	2	0
	C	0	1

女性の利得行列		女性 S	女性 C
男性	S	1	0
	C	0	2

双行列ゲームの記法に従うと

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

例：男女の争い — 第 1 式

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

これは

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$$

になる

例：男女の争い — 第 $\boxed{2}$ 式

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

$\boxed{2}$ $u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$

これは

$$u \geq 2y_1, u \geq y_2$$

になる

例：男女の争い — 第 3 式

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

3 $y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$

これは

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$$

になる

例：男女の争い — 第 4 式

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

4 $v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$

これは

$$v \geq x_1, v \geq 2x_2$$

になる

例：男女の争い — 第 5 式

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\boxed{5} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - a_{i\bullet} y\right) = 0$$

これは

$$x_1(u - 2y_1) + x_2(u - y_2) = 0$$

になる

例：男女の争い — 第 6 式

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\boxed{6} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j \left(v - b_{\bullet j}^{\top} x \right) = 0$$

これは

$$y_1(v - x_1) + y_2(v - 2x_2) = 0$$

になる

例：男女の争い — 必要十分条件

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ **が存在して**

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. $x_1(u - 2y_1) + x_2(u - y_2) = 0$
6. $y_1(v - x_1) + y_2(v - 2x_2) = 0$

例：男女の争い — 相補性 (1)

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. $x_1(u - 2y_1) + x_2(u - y_2) = 0$
6. $y_1(v - x_1) + y_2(v - 2x_2) = 0$

第 1 式と第 2 式から，第 5 式は次のように言い換えられる

$$x_1(u - 2y_1) = 0 \quad \text{かつ} \quad x_2(u - y_2) = 0$$

例：男女の争い — 相補性 (2)

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. $x_1(u - 2y_1) + x_2(u - y_2) = 0$
6. $y_1(v - x_1) + y_2(v - 2x_2) = 0$

第 1 式と第 2 式から，第 5 式は次の 2 条件に言い換えられる

- $x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$
- $x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$

例：男女の争い — 相補性 (3)

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ **が存在して**

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. $x_1(u - 2y_1) + x_2(u - y_2) = 0$
6. $y_1(v - x_1) + y_2(v - 2x_2) = 0$

第 3 式と第 4 式から，第 6 式は次のように言い換えられる

$$y_1(v - x_1) = 0 \quad \text{かつ} \quad y_2(v - 2x_2) = 0$$

例：男女の争い — 相補性 (4)

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. $x_1(u - 2y_1) + x_2(u - y_2) = 0$
6. $y_1(v - x_1) + y_2(v - 2x_2) = 0$

第 3 式と第 4 式から，第 6 式は次の 2 条件に言い換えられる

- $y_1 = 0$ **または** $v - x_1 = 0$
- $y_2 = 0$ **または** $v - 2x_2 = 0$

例：男女の争い — 必要十分条件の書き換え

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. 「$x_1 = 0$ または $u - 2y_1 = 0$」かつ「$x_2 = 0$ または $u - y_2 = 0$」
6. 「$y_1 = 0$ または $v - x_1 = 0$」かつ「$y_2 = 0$ または $v - 2x_2 = 0$」

式 5 と 6 は**相補性条件**とも呼ばれる

例：男女の争い — Lemke–Howson 法の基本的なアイディア その 1

$x \in \mathbb{R}^2$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が男女の争いの混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1, u \geq y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$
5. 「$x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$」**かつ**「$x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$」
6. 「$y_1 = 0$ **または** $v - x_1 = 0$」**かつ**「$y_2 = 0$ **または** $v - 2x_2 = 0$」

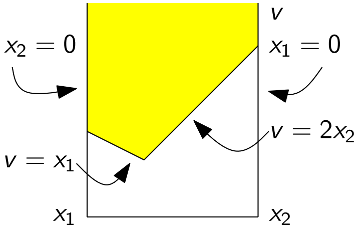
Lemke–Howson 法の基本的なアイディア その 1

x_1, x_2, y_1, y_2, u, v **が式 1 〜 4 を満たすように保ちながら，**
式 5 と 6 を満たすようにする

例：男女の争い — プレイヤー 1 の凸多面体

次の式を満たす $(x_1, x_2, v) \in \mathbb{R}^3$ を図示

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
4. $v \geq x_1, v \geq 2x_2$

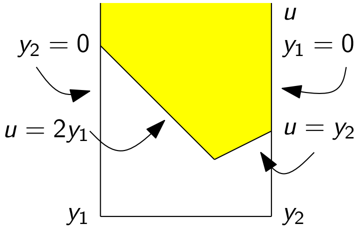


例：男女の争い — プレイヤー 2 の凸多面体

次の式を満たす $(y_1, y_2, u) \in \mathbb{R}^3$ を図示

3 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$

2 $u \geq 2y_1, u \geq y_2$



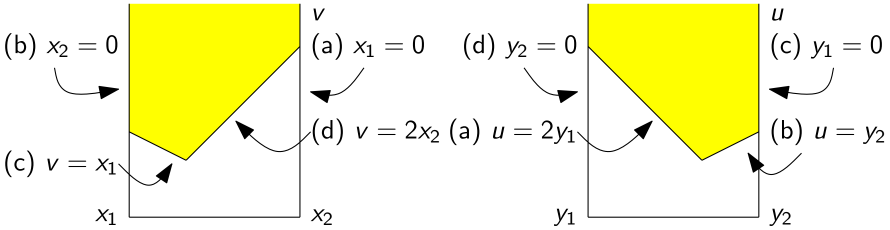
例：男女の争い — 相補性条件

(a) $x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$

(b) $x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$

(c) $v - x_1 = 0$ **または** $y_1 = 0$

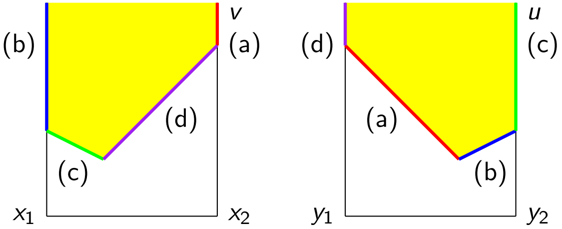
(d) $v - 2x_2 = 0$ **または** $y_2 = 0$



(a)〜(d) **を同時に満たすような** x_1, x_2, y_1, y_2, u, v **は何か？**

例：男女の争い — 相補性条件を満たすか？ (1)

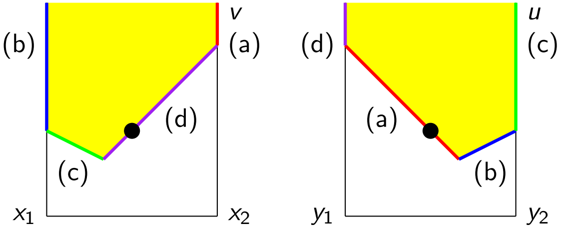
(a) $x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$
(b) $x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$
(c) $v - x_1 = 0$ **または** $y_1 = 0$
(d) $v - 2x_2 = 0$ **または** $y_2 = 0$



- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1, 1)$ **のとき** (a) **と** (d) **は満たすが，** (b) **と** (c) **は満たさない**

例：男女の争い — 相補性条件を満たすか？ (1)

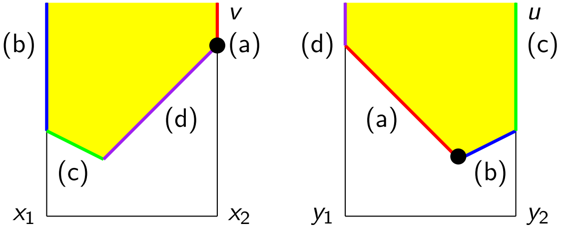
(a) $x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$
(b) $x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$
(c) $v - x_1 = 0$ **または** $y_1 = 0$
(d) $v - 2x_2 = 0$ **または** $y_2 = 0$



- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1, 1)$ **のとき** (a) **と** (d) **は満たすが，** (b) **と** (c) **は満たさない**

例：男女の争い — 相補性条件を満たすか？ (2)

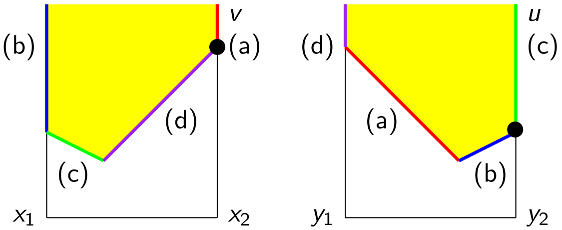
(a) $x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$
(b) $x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$
(c) $v - x_1 = 0$ **または** $y_1 = 0$
(d) $v - 2x_2 = 0$ **または** $y_2 = 0$



- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (0, 1, 1/3, 2/3, 2/3, 2)$ **のとき** (a), (b), (d) **は満たすが，**(c) **は満たさない**

例：男女の争い — 相補性条件を満たすか？ (3)

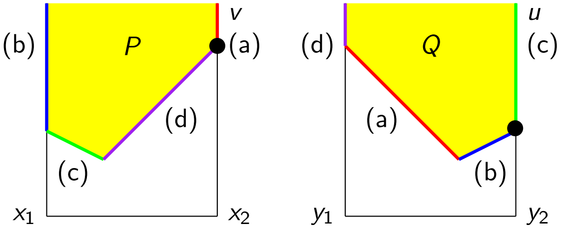
(a) $x_1 = 0$ **または** $u - 2y_1 = 0$
(b) $x_2 = 0$ **または** $u - y_2 = 0$
(c) $v - x_1 = 0$ **または** $y_1 = 0$
(d) $v - 2x_2 = 0$ **または** $y_2 = 0$



- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (0, 1, 0, 1, 1, 2)$ **のとき** (a), (b), (c), (d) **をすべて満たす**
- $\therefore$ **これは混合ナッシュ均衡を与える**

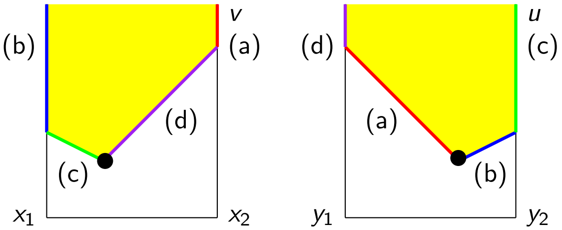
例：男女の争い — ここまでのまとめ

- 第 $\boxed{1}$ 式と第 $\boxed{4}$ 式 $\rightsquigarrow$ プレイヤー 1 の凸多面体 P
- 第 $\boxed{2}$ 式と第 $\boxed{3}$ 式 $\rightsquigarrow$ プレイヤー 2 の凸多面体 Q
- P と Q の点の対で，第 $\boxed{5}$ 式と第 $\boxed{6}$ 式 (相補性条件) を満たすものを見つけたい
- P と Q の頂点が相補性条件を最も "満たしやすい"
- $\therefore$ P と Q の頂点の対を探索すればよい



例：男女の争い — 他にもある混合ナッシュ均衡 (1)

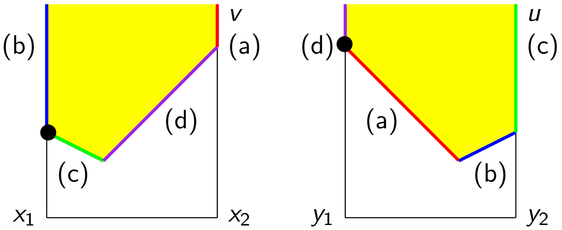
(a) $x_1 = 0$ または $u - 2y_1 = 0$
(b) $x_2 = 0$ または $u - y_2 = 0$
(c) $v - x_1 = 0$ または $y_1 = 0$
(d) $v - 2x_2 = 0$ または $y_2 = 0$



- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (2/3, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 2/3)$ のとき (a), (b), (c), (d) をすべて満たす
- $\therefore$ これは混合ナッシュ均衡を与える

例：男女の争い — 他にもある混合ナッシュ均衡 (2)

(a) $x_1 = 0$ または $u - 2y_1 = 0$
(b) $x_2 = 0$ または $u - y_2 = 0$
(c) $v - x_1 = 0$ または $y_1 = 0$
(d) $v - 2x_2 = 0$ または $y_2 = 0$



- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (1, 0, 1, 0, 2, 1)$ のとき (a), (b), (c), (d) をすべて満たす
- ∴ これは混合ナッシュ均衡を与える

男女の争い — この計算のまとめ

3 つ混合ナッシュ均衡が見つかった

- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (0, 1, 0, 1, 1, 2)$
  - 男性は S を確率 0，C を確率 1 で選ぶ
  - 女性は S を確率 0，C を確率 1 で選ぶ
  - 男性の期待利得は 1，女性の期待利得は 2
- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (2/3, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 2/3)$
  - 男性は S を確率 2/3，C を確率 1/3 で選ぶ
  - 女性は S を確率 1/3，C を確率 2/3 で選ぶ
  - 男性の期待利得は 2/3，女性の期待利得は 2/3
- $(x_1, x_2, y_1, y_2, u, v) = (1, 0, 1, 0, 2, 1)$
  - 男性は S を確率 1，C を確率 0 で選ぶ
  - 女性は S を確率 1，C を確率 0 で選ぶ
  - 男性の期待利得は 2，女性の期待利得は 1

目次

別の双行列ゲームを例として，混合ナッシュ均衡を計算する

次の A, B **で定義される双行列ゲームを考える** $(m = 3,\ n = 2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

必要十分条件

$x \in \mathbb{R}^3$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1$
2. $u \geq 6y_2, u \geq 2y_1 + 5y_2, u \geq 3y_1 + 3y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1 + 4x_3, v \geq 2x_2 + 3x_3$
5. $x_1(u - 6y_2) + x_2(u - 2y_1 - 5y_2) + x_3(u - 3y_1 - 3y_2) = 0$
6. $y_1(v - x_1 - 4x_3) + y_2(v - 2x_2 - 3x_3) = 0$

必要十分条件の書き換え

男女の争いのときと同じ議論で次が言える

$x \in \mathbb{R}^3$ と $y \in \mathbb{R}^2$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

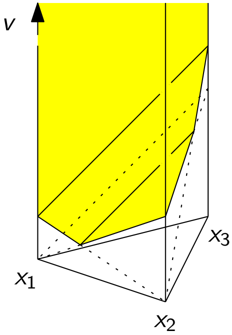
ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1$
2. $u \geq 6y_2, u \geq 2y_1 + 5y_2, u \geq 3y_1 + 3y_2$
3. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq x_1 + 4x_3, v \geq 2x_2 + 3x_3$
5. 「$x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$」かつ
   「$x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$」かつ
   「$x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$」
6. 「$y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$」かつ
   「$y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$」

プレイヤー 1 の凸多面体

次の式を満たす $(x_1, x_2, x_3, v) \in \mathbb{R}^4$ **を図示**

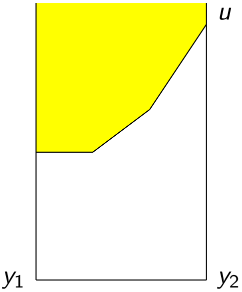
1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1$
4. $v \geq x_1 + 4x_3, v \geq 2x_2 + 3x_3$



プレイヤー 2 の凸多面体

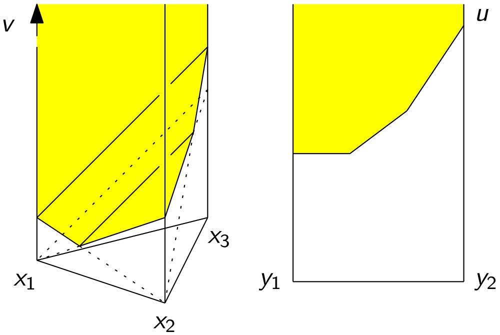
次の式を満たす $(y_1, y_2, u) \in \mathbb{R}^3$ を図示

- 3 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1$
- 2 $u \geq 6y_2, u \geq 2y_1 + 5y_2, u \geq 3y_1 + 3y_2$



相補性条件

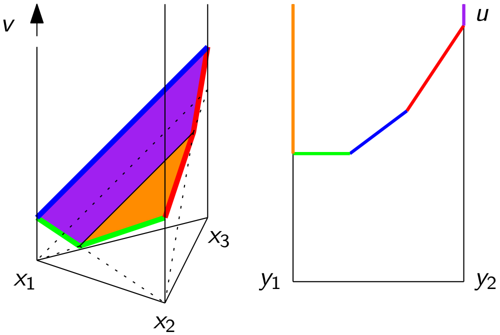
(a) $x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$
(b) $x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$
(c) $x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$
(d) $y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$
(e) $y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$



(a)〜(e) を同時に満たす $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, u, v$ は何か？

相補性条件

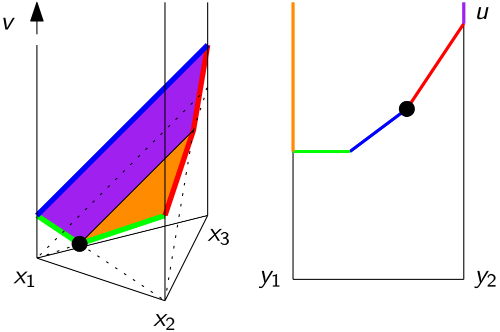
- (a) $x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$
- (b) $x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$
- (c) $x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$
- (d) $y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$
- (e) $y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$



(a)〜(e) を同時に満たす $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, u, v$ は何か？

混合ナッシュ均衡 (1)

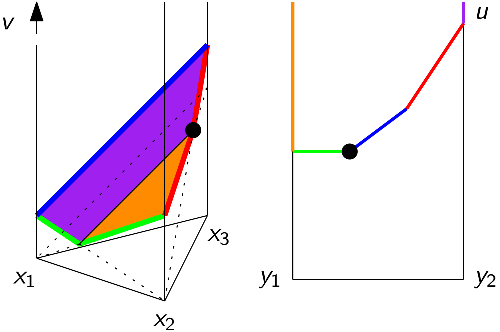
(a) $x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$
(b) $x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$
(c) $x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$
(d) $y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$
(e) $y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$



$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, u, v) = (2/3, 1/3, 0, 1/3, 2/3, 4, 2/3)$ は相補性条件を満たすのでナッシュ均衡を導く

混合ナッシュ均衡 (2)

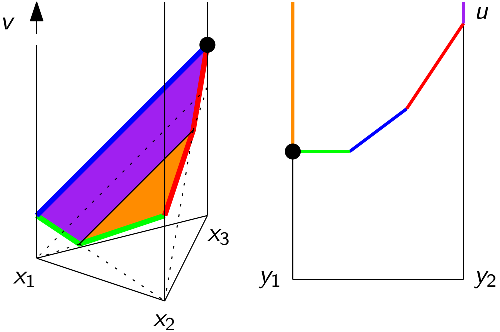
(a) $x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$
(b) $x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$
(c) $x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$
(d) $y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$
(e) $y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$



$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, u, v) = (0, 1/3, 2/3, 2/3, 1/3, 3, 8/3)$ は相補性条件を満たすのでナッシュ均衡を導く

混合ナッシュ均衡 (3)

(a) $x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$
(b) $x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$
(c) $x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$
(d) $y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$
(e) $y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$



$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, u, v) = (0, 0, 1, 1, 0, 3, 4)$ は相補性条件を満たすのでナッシュ均衡を導く

目次

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件 (再掲)

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ **が存在して**

1. $x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$
2. $u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$
3. $y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
4. $v \geq b_{\bullet j}^{\top} x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$
5. $\sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - a_{i\bullet} y\right) = 0$
6. $\sum_{j=1}^{n} y_j \left(v - b_{\bullet j}^{\top} x\right) = 0$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件 (言い換え)

男女の争いのときと同様に証明できる (演習問題)

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$
2. $u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\ i \in \{1, \ldots, m\}$
3. $y \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
4. $v \geq b_{\bullet j}^{\top} x \quad \forall\ j \in \{1, \ldots, n\}$
5. $\forall\ i \in \{1, \ldots, m\}$: $x_i = 0$ **または** $u - a_{i\bullet} y = 0$
6. $\forall\ j \in \{1, \ldots, n\}$: $y_j = 0$ **または** $v - b_{\bullet j}^{\top} x = 0$

例と同じようにやろうとすると... (1)

- **プレイヤー 1 の凸多面体**

$$P = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ v \geq b_{\bullet j}^{\top} x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \end{array} \right\}$$

不等式が $m + n$ **個**

- **プレイヤー 2 の凸多面体**

$$Q = \left\{ (y, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} y \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \end{array} \right\}$$

不等式が $m + n$ **個**

例と同じようにやろうとすると... (2)

P と Q を定義する各不等式にラベルを付ける

- $i \in \{1, \ldots, m\}$ というラベルを持つ不等式
  - $x_i \geq 0$ (P を定義する不等式の 1 つ)
  - $u \geq a_{i\bullet} y$ (Q を定義する不等式の 1 つ)
- $j \in \{1, \ldots, n\}$ というラベルを持つ不等式
  - $v \geq b_{\bullet j}^\top x$ (P を定義する不等式の 1 つ)
  - $y_j \geq 0$ (Q を定義する不等式の 1 つ)
- 相補性：各ラベルに対して，そのラベルを持つ不等式の
  どちらか一方が等号で満たされる

先ほどの例で確認

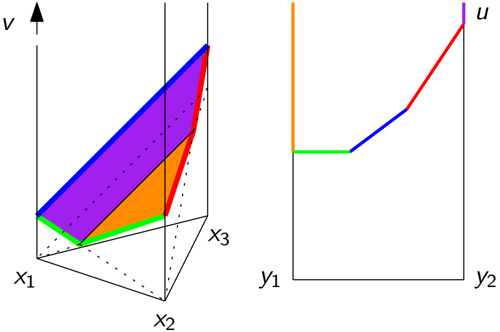
(a) ■ $x_1 = 0$ または $u - 6y_2 = 0$ $(i = 1)$

(b) ■ $x_2 = 0$ または $u - 2y_1 - 5y_2 = 0$ $(i = 2)$

(c) ■ $x_3 = 0$ または $u - 3y_1 - 3y_2 = 0$ $(i = 3)$

(d) ■ $y_1 = 0$ または $v - x_1 - 4x_3 = 0$ $(j = 1)$

(e) ■ $y_2 = 0$ または $v - 2x_2 - 3x_3 = 0$ $(j = 2)$



Lemke–Howson 法の基本的なアイディア ('64)

Lemke–Howson 法の基本的なアイディア その 1

(x, v) が P の頂点，(y, u) が Q の頂点であるように保ちながら，相補性条件を満たすようにする

Lemke–Howson 法の基本的なアイディア その 2

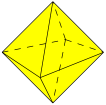
(x, v) が P の頂点，(y, u) が Q の頂点であるように保つとき，「足りないラベル」がちょうど 1 つであることも同時に保つ

ここからの仮定

P と Q には縮退がない

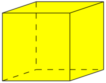
縮退のない n 次元凸多面体とは？

- 任意の頂点を通るファセットの数がちょうど n であること



縮退のある凸多面体

$(n = 3)$

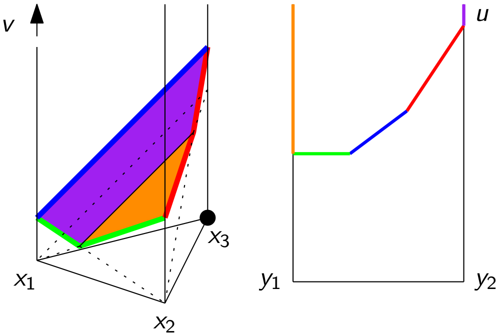


縮退のない凸多面体

$(n = 3)$

Lemke–Howson 法 (1)

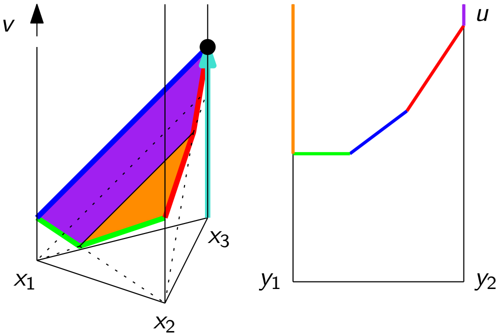
1. $\{1,\ldots,m\}$ の中の 1 つのラベルを選び，k とする
2. P の頂点 p で，$\{1,\ldots,m\}\setminus\{k\}$ のラベルを持つ不等式をすべて等号で満たすものを見つける
3. 頂点 p では，ある $j' \in \{1,\ldots,j\}$ のラベルを持つ不等式を等号で満たす



$k = 3$

Lemke–Howson 法 (1)

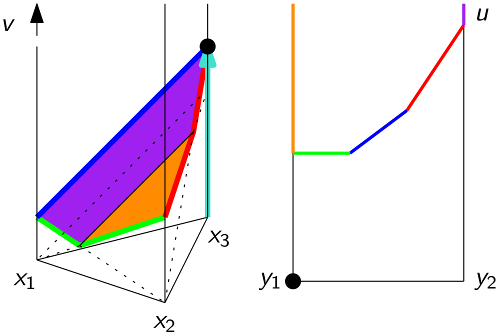
1. $\{1, \ldots, m\}$ の中の 1 つのラベルを選び，k とする
2. P の頂点 p で，$\{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$ のラベルを持つ不等式をすべて等号で満たすものを見つける
3. 頂点 p では，ある $j' \in \{1, \ldots, j\}$ のラベルを持つ不等式を等号で満たす



$k = 3,\ j' = 1$

Lemke–Howson 法 (2)

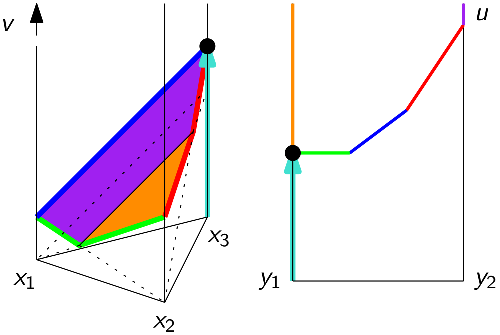
4. Q の頂点 q で，$\{1, \ldots, n\} \setminus \{j'\}$ のラベルを持つ不等式をすべて等号で満たすものを見つける
5. 頂点 q では，ある $i' \in \{1, \ldots, i\}$ のラベルを持つ不等式を等号で満たす



$k = 3, j' = 1$

Lemke–Howson 法 (2)

4. Q の頂点 q で，$\{1, \ldots, n\} \setminus \{j'\}$ のラベルを持つ不等式をすべて等号で満たすものを見つける
5. 頂点 q では，ある $i' \in \{1, \ldots, i\}$ のラベルを持つ不等式を等号で満たす



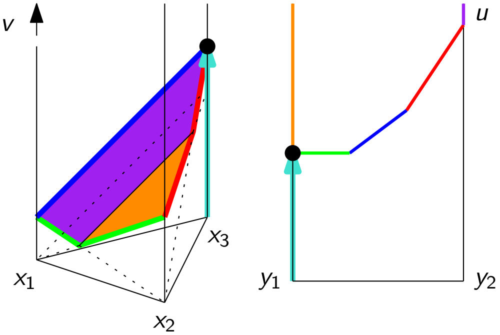
$k = 3,\ j' = 1,\ i' = 3$

Lemke–Howson 法 (3)

6 **もし $i' = k$ ならば終了**

なぜならば，

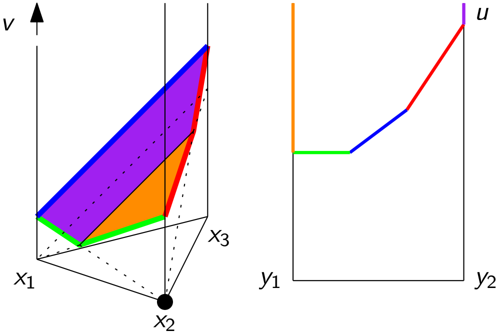
- p **において等号で満たされる不等式のラベル全体の集合** $= \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\} \cup \{j'\}$
- q **において等号で満たされる不等式のラベル全体の集合** $= \{1, \ldots, n\} \setminus \{j'\} \cup \{i'\}$
- $i' = k \Rightarrow$ **この 2 つの集合に含まれないラベルはない** (p, q **が相補性を満たす**)



$k = 3,\ j' = 1,\ i' = 3$

Lemke–Howson 法 (4)

7. $i' \neq k$ ならば，
   i' は p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通する唯一のもの
8. P において i' を等号で満たさないように隣りの頂点へ移動
   (p の更新)

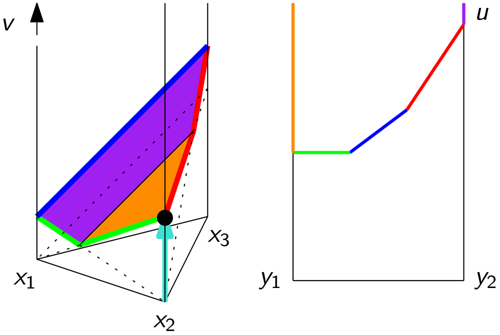


$k = 2,\ j' = 2,\ i' = 1$

Lemke–Howson 法 (4)

7. $i' \neq k$ ならば，
   i' は p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通する唯一のもの
8. P において i' を等号で満たさないように隣りの頂点へ移動

   （p の更新）

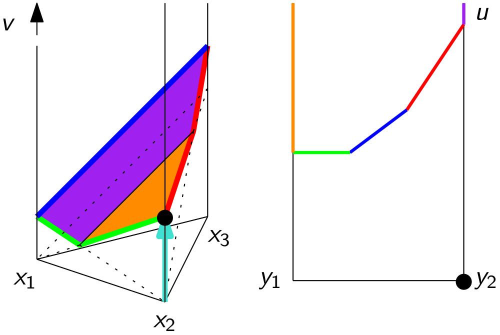


$k = 2,\ j' = 2,\ i' = 1$

Lemke–Howson 法 (4)

7. $i' \neq k$ ならば，
   i' は p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通する唯一のもの
8. P において i' を等号で満たさないように隣りの頂点へ移動

   (p の更新)

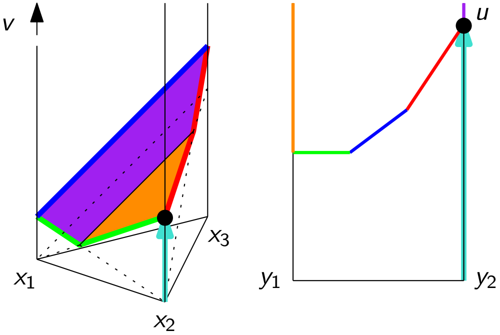


$k = 2,\ j' = 2,\ i' = 1$

Lemke–Howson 法 (4)

7. $i' \neq k$ ならば，
   i' は p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通する唯一のもの
8. P において i' を等号で満たさないように隣りの頂点へ移動

(p の更新)

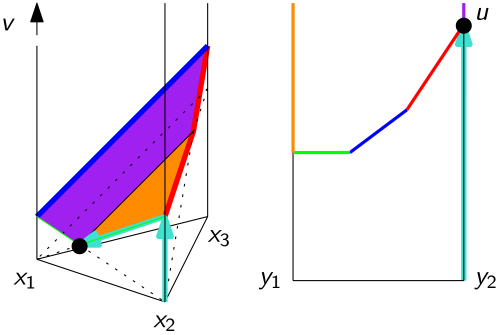


$k = 2,\ j' = 2,\ i' = 1$

Lemke–Howson 法 (4)

7. $i' \neq k$ ならば，
   i' は p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通する唯一のもの
8. P において i' を等号で満たさないように隣りの頂点へ移動

(p の更新)



$k = 2,\ j' = 2,\ i' = 1$

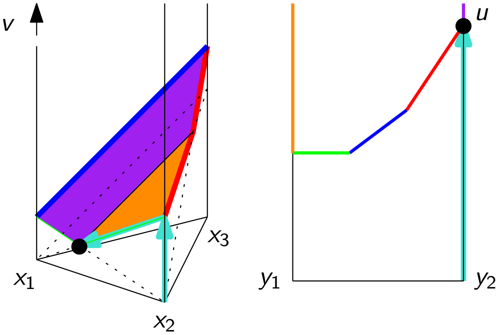
Lemke–Howson 法 (5)

9 新たに等号で満たされるラベルが $k \Rightarrow$ 相補性条件が満たされて終了

10 そうでなければ，
p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通するものが唯一存在

11 Q においてそれを等号で満たさないように隣りの頂点へ移動
(q の更新)

- p が等号で満たすラベル：
$i = 3$, $j = 1, 2$
- q が等号で満たすラベル：
$i = 1$, $j = 1$



Lemke–Howson 法 (5)

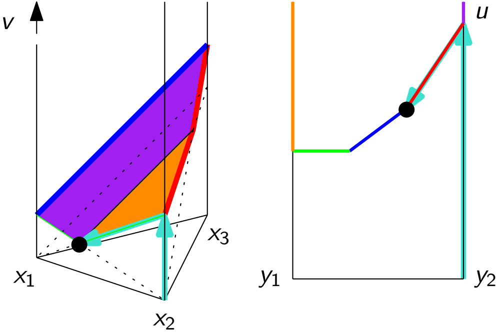
12 ここで相補性条件が満たされれば終了

13 そうでなければ，
p と q が等号で満たす不等式のラベルで共通するものが唯一存在

14 P においてそれを等号で満たさないように隣りの頂点へ移動
(p の更新)

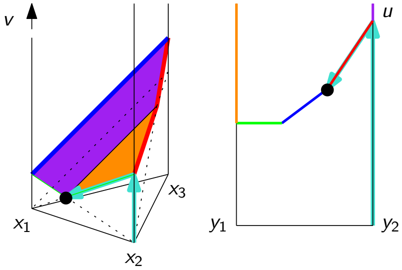
15 これの繰り返し

- p が等号で満たすラベル：
$i = 3$, $j = 1, 2$
- q が等号で満たすラベル：
$i = 1, 2$



Lemke–Howson 法の特徴

- **凸多面体 P の頂点 p と凸多面体 Q の頂点 q を常に保持**
- **アルゴリズムが終了していないとき，**
  p と q が等号で満たすラベルには共通するものが唯一存在
  ($\because$ P と Q に縮退がない)
- $\therefore$ **アルゴリズムの開始時に k を決めた時点で，その後の動きはすべて決まる**
- **最終的に，混合ナッシュ均衡が 1 つ見つかる**
  ($\because$ P と Q に縮退がない)



Lemke–Howson 法：まとめ

Lemke–Howson 法について知られていること 1

双行列ゲームに退化がないとき (P と Q に退化がないとき)，
Lemke–Howson 法は有限時間で停止し，混合ナッシュ均衡を 1 つ見つける

退化があるときには共通するラベルが唯一ではないが，
うまくラベルを選ぶことで有限時間停止性が証明できる

Lemke–Howson 法について知られていること 2

Lemke–Howson 法は多項式時間アルゴリズムではない

実際，指数時間かかってしまう例がある (Savani, von Stengel '06)

未解決問題 (難しい)

与えられた双行列ゲームの混合ナッシュ均衡を 1 つ見つける
多項式時間アルゴリズムはあるか？

「なさそうだ」という計算量理論的根拠もある
(例えば，Chen, Deng, Teng '09)

目次

今日のまとめ

今日やったこと

戦略形 2 人ゲームの混合ナッシュ均衡計算法を理解する

- Lemke–Howson **法**

参考文献

- B. von Stengel, Equilibrium computation for two-player games in strategic and extensive form. Chapter 3, Algorithmic Game Theory, eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. Vazirani, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 53–78.
- R. Savani and B. von Stengel, Hard-to-solve bimatrix games. Econometrica 74, 2006, 397-429.
- X. Chen, X. Deng, and S.-H. Teng, Settling the complexity of computing two-player Nash equilibria. J. ACM 56(3), 2009.

目次