

離散最適化基礎論 第 4 回
戦略形 2 人ゼロ和ゲーム：離散構造とアルゴリズム (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 10 月 26 日

最終更新：2012 年 10 月 26 日 11:38

概要

目標

線形計画問題の離散構造を理解する

- ▶ 線形計画問題の (弱) 双対性
- ▶ 線形計画問題に対する単体法

目次

- ① 線形計画問題の双対性：例
- ② 線形計画問題の双対性：一般論
- ③ 単体法の基本的な動き
- ④ 今日のまとめ

線形計画問題：最適解であることの判定

次の線形計画問題を考える

 $x \in \mathbb{R}^n$ は変数, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \geq b \end{array}$$

疑問

$Ax \geq b$ を満たす x (つまり許容解 x) が与えられたとき,
 x がこの問題の最適解であるかどうかを簡単に判定できるか?

注：「最適解であるかどうかを判定できる」ことが簡単でないと
「最適化問題を解く」ことも簡単にはできない

線形計画問題：最適解であることの判定 (例)

次の線形計画問題を考える

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, \\ & x_1 - x_2 \geq -4, -x_1 - x_2 \geq -3, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{array}$$

疑問

許容解 (x_1, x_2) が与えられたとき，
 (x_1, x_2) がこの問題の最適解であるかどうかを簡単に判定できるか？

注：「最適解であるかどうかを判定できる」ことが簡単でないと
「最適化問題を解く」ことも簡単にはできない

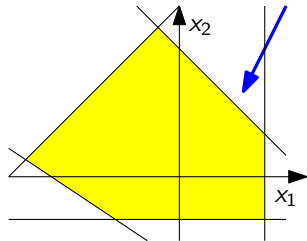
許容解全体の集合 (許容領域) は凸多面体

許容領域：すべての許容解から成る集合

線形計画問題：例

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\
 \text{subject to} & -x_1 \geq -2, \\
 & x_2 \geq -1, \\
 & x_1 - x_2 \geq -4, \\
 & -x_1 - x_2 \geq -3, \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq -6
 \end{array}$$



線形計画問題：最適解であることの判定 (例) — より具体的に

次の線形計画問題を考える

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, \\ & x_1 - x_2 \geq -4, -x_1 - x_2 \geq -3, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{array}$$

疑問 — より具体的に

 $x_1 = -3/2, x_2 = -1$ はこの問題の最適解であるか？これは許容解であり，目的関数値は $-7/2$

式変形により最適値の下界を計算する (1)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- ▶ 第1式 + 第2式 + 第3式 + 第4式 + 第5式を計算すると

$$\begin{array}{rcl}
 -x_1 & & \geq -2 \\
 & x_2 & \geq -1 \\
 x_1 & -x_2 & \geq -4 \\
 -x_1 & -x_2 & \geq -3 \\
 2x_1 & +3x_2 & \geq -6 \\
 \hline
 x_1 & +2x_2 & \geq -16
 \end{array}$$

- ▶ \therefore 任意の許容解の目的関数値 ≥ -16
- ▶ 特に, 最適値 ≥ -16

式変形により最適値の下界を計算する (2)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- ▶ 第4式 + 第5式を計算すると

$$\begin{array}{rcl} -x_1 & -x_2 & \geq -3 \\ 2x_1 & +3x_2 & \geq -6 \\ \hline x_1 & +2x_2 & \geq -9 \end{array}$$

- ▶ \therefore 任意の許容解の目的関数値 ≥ -9
- ▶ 特に, 最適値 ≥ -9

式変形により最適値の下界を計算する (3)

(x_1, x_2) は許容解であるとする

- ▶ 第2式 $\times 3$ + 第3式を計算すると

$$\begin{array}{rcl} 3 \times (& & x_2) & \geq & -1 \times 3 \\ & x_1 & -x_2 & \geq & -4 \\ \hline & x_1 & +2x_2 & \geq & -7 \end{array}$$

- ▶ \therefore 任意の許容解の目的関数値 ≥ -7
- ▶ 特に, 最適値 ≥ -7

式変形により最適値の下界を計算する (4)

 (x_1, x_2) は許容解であるとする

- ▶ 第2式 $\times 1/2$ + 第5式 $\times 1/2$ を計算すると

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} \times (& & x_2 &) & \geq & -1 \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \times (& 2x_1 & +3x_2 &) & \geq & -6 \times \frac{1}{2} \\ \hline & x_1 & +2x_2 & & \geq & -\frac{7}{2} \end{array}$$

- ▶ \therefore 任意の許容解の目的関数値 $\geq -\frac{7}{2}$
- ▶ 特に, 最適値 $\geq -\frac{7}{2}$
- ▶ $\therefore x_1 = -3/2, x_2 = -1$ はこの問題の最適解である!

次の疑問

どのように「第2式 $\times 1/2$ + 第5式 $\times 1/2$ 」を見つけるのか?

式変形により最適値の下界を計算する (5)

(x_1, x_2) は許容解であるとして, $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ とする

- ▶ 第 i 式に y_i を掛けて, 和を計算すると

$$\begin{array}{rcl}
 y_1 \times (& -x_1 &) & \geq & -2 \times y_1 \\
 y_2 \times (& & x_2 &) & \geq & -1 \times y_2 \\
 y_3 \times (& x_1 & -x_2 &) & \geq & -4 \times y_3 \\
 y_4 \times (& -x_1 & -x_2 &) & \geq & -3 \times y_4 \\
 y_5 \times (& 2x_1 & +3x_2 &) & \geq & -6 \times y_5 \\
 \hline
 (-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5)x_1 & + & (y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5)x_2 & \geq & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5
 \end{array}$$

- ▶ 仮に, $-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1$, $y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2$ とすると

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 &= (-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5)x_1 + (y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5)x_2 \\
 &\geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5
 \end{aligned}$$

- ▶ \therefore 任意の許容解の目的関数値 $\geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5$

「 $-2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5$ 」をできるだけ大きくしたい

「できるだけ大きな下界を得る」という線形計画問題

できるだけ大きな下界を得る，という問題

 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\ & \text{subject to} && -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2 \\ & && y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ この問題も線形計画問題
- ▶ この問題をもとの問題の**双対問題** (dual problem) と呼ぶ

主問題と双対問題

主問題 (primal problem)

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_1 - x_2 \geq -4, \\ & -x_1 - x_2 \geq -3, 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{array}$$

双対問題 (dual problem)

 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\ \text{subject to} & -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\ & y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0 \end{array}$$

主問題と双対問題の目的関数値

- ▶ x_1, x_2 が主問題の許容解, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 が双対問題の許容解 \Rightarrow

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= (-y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5)x_1 + (y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5)x_2 \\ &= -x_1y_1 + x_2y_2 + (x_1 - x_2)y_3 + (-x_1 - x_2)y_4 \\ &\quad + (2x_1 + 3x_2)y_5 \\ &\geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \end{aligned}$$

- ▶ \therefore 主問題の任意の許容解と双対問題の任意の許容解に対して

$$\boxed{\text{主問題の目的関数値}} \geq \boxed{\text{双対問題の目的関数値}}$$

- ▶ 特に

$$\boxed{\text{主問題の最適値}} \geq \boxed{\text{双対問題の最適値}}$$

許容解の最適性

- ▶ 仮に，主問題の許容解 x_1^*, x_2^* と双対問題の許容解 $y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*$ が

$$x_1^* + 2x_2^* = -2y_1^* - y_2^* - 4y_3^* - 3y_4^* - 6y_5^*$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

を満たすとする

- ▶ このとき，主問題の任意の許容解 x_1, x_2 に対して

$$x_1^* + 2x_2^* = -2y_1^* - y_2^* - 4y_3^* - 3y_4^* - 6y_5^* \leq x_1 + 2x_2$$

- ▶ 双対問題の任意の許容解 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 に対して

$$-2y_1^* - y_2^* - 4y_3^* - 3y_4^* - 6y_5^* = x_1^* + 2x_2^* \geq -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5$$

- ▶ $\therefore x_1^*, x_2^*$ は主問題の最適解， $y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*$ は双対問題の最適解

備忘録：主問題の任意の許容解と双対問題の任意の許容解に対して

$$\boxed{\text{主問題の目的関数値}} \geq \boxed{\text{双対問題の目的関数値}}$$

ここまでのまとめ

主問題 (primal problem)

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && x_1 + 2x_2 \\ &\text{subject to} && -x_1 \geq -2, \\ & && x_2 \geq -1, \\ & && x_1 - x_2 \geq -4, \\ & && -x_1 - x_2 \geq -3, \\ & && 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{aligned}$$

- ▶ $(x_1, x_2) = (-\frac{3}{2}, -1)$ は許容解
- ▶ 目的関数値 = $-7/2$

双対問題 (dual problem)

 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\ &\text{subject to} && -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\ & && y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\ & && y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \\ & && y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, \\ & && y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ は許容解
- ▶ 目的関数値 = $-7/2$

いままでの議論から

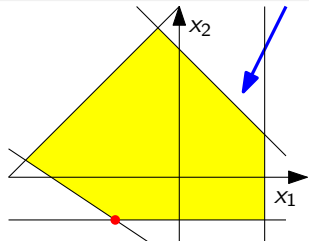
 $(x_1, x_2) = (-\frac{3}{2}, -1)$ は (主問題の) 最適解で, 最適値は $-7/2$

双対問題と凸多面体 (1)

主問題

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_1 - x_2 \geq -4, \\ & -x_1 - x_2 \geq -3, 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{array}$$

 $(x_1, x_2) = (-3/2, -1)$ は最適解

双対問題と凸多面体 (2)

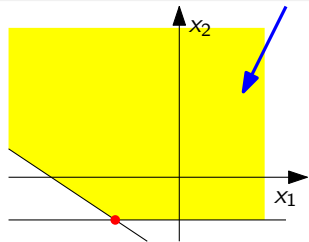
主問題

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 + 2x_2 \\ & \text{subject to} && -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_1 - x_2 \geq -4, \\ & && -x_1 - x_2 \geq -3, 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{aligned}$$

次の式 (制約) が無くても
最適値は変わらない

$$\begin{aligned} -x_1 & \geq -2, \\ x_1 - x_2 & \geq -4, \\ -x_1 - x_2 & \geq -3 \end{aligned}$$



双対問題と凸多面体 (3)

主問題

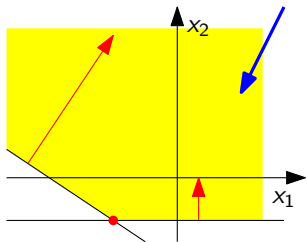
 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 + 2x_2 \\ & \text{subject to} && -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_1 - x_2 \geq -4, \\ & && -x_1 - x_2 \geq -3, 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{aligned}$$

- ▶ 残された制約は次の2つ

$$\begin{aligned} x_2 & \geq -1, \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq -6 \end{aligned}$$

- ▶ 制約が定める閉半空間の境界は超平面で、その法線ベクトルは $(0, 1)$ と $(2, 3)$



双対問題と凸多面体 (4)

主問題

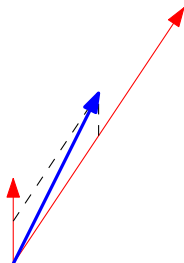
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 + 2x_2 \\ & \text{subject to} && -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_1 - x_2 \geq -4, \\ & && -x_1 - x_2 \geq -3, 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{aligned}$$

- ▶ 目的関数の方向ベクトルは $(1, 2)$
- ▶ ここで,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- ▶ 目的関数の方向ベクトルを $(0, 1)$ と $(2, 3)$ の非負線形結合として表現できた



双対問題と凸多面体 (5)

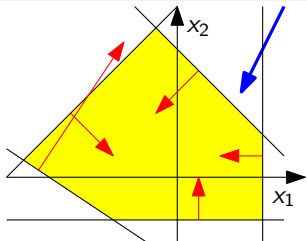
主問題

 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && x_1 + 2x_2 \\ & \text{subject to} && -x_1 \geq -2, x_2 \geq -1, x_1 - x_2 \geq -4, \\ & && -x_1 - x_2 \geq -3, 2x_1 + 3x_2 \geq -6 \end{aligned}$$

- ▶ 制約が定める閉半空間の境界は超平面で，その法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



双対問題と凸多面体 (6)

双対問題

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && -2y_1 - y_2 - 4y_3 - 3y_4 - 6y_5 \\ & \text{subject to} && -y_1 + y_3 - y_4 + 2y_5 = 1, \\ & && y_2 - y_3 - y_4 + 3y_5 = 2, \\ & && y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ 目的関数の方向ベクトル $(1, 2)$ をこれら 5 つのベクトルの非負線形結合として表す

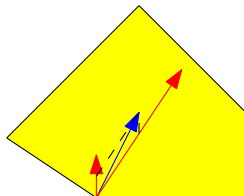
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

双対問題と凸多面体 (7)

許容領域の各頂点における状況

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- ▶ つまり, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ で,
 $y_2 = 1/2, y_5 = 1/2$
- ▶ これは双対問題の許容解である

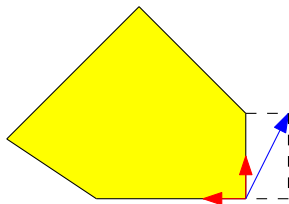


双対問題と凸多面体 (8)

許容領域の各頂点における状況

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ つまり, $y_3 = y_4 = y_5 = 0$ で,
 $y_1 = -1, y_2 = 2$
- ▶ これは双対問題の許容解ではない

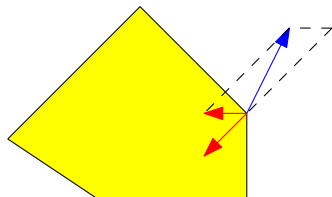


双対問題と凸多面体 (9)

許容領域の各頂点における状況

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- ▶ つまり, $y_2 = y_3 = y_5 = 0$ で,
 $y_1 = 1, y_4 = -2$
- ▶ これは双対問題の許容解ではない

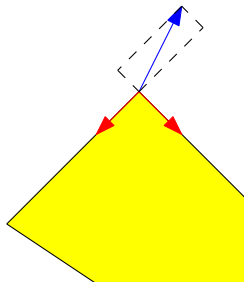


双対問題と凸多面体 (10)

許容領域の各頂点における状況

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- ▶ つまり, $y_1 = y_2 = y_5 = 0$ で,
 $y_3 = -1/2, y_4 = -3/2$
- ▶ これは双対問題の許容解ではない

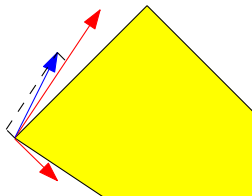


双対問題と凸多面体 (11)

許容領域の各頂点における状況

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- ▶ つまり, $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ で,
 $y_3 = -1/5, y_5 = 3/5$
- ▶ これは双対問題の許容解ではない



主問題と双対問題：ここまでのまとめ

- ▶ 主問題の許容解 $(x_1, x_2) = (-2/3, -1)$ (許容領域の頂点)
 - ▶ 目的関数値は $-7/2$
- ▶ これは2つの制約「 $x_2 \geq -1, 2x_1 + 3x_2 \geq -6$ 」を等号で満たす
- ▶ それらが定める閉半空間の境界は超平面で、その法線ベクトルは $(0, 1)$ と $(2, 3)$
- ▶ 目的関数の方向ベクトルは $(1, 2)$ で、このとき、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- ▶ つまり、 $y_1 = 0, y_2 = 1/2, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 1/2$ は双対問題の許容解
 - ▶ 目的関数値は $-7/2$
- ▶ $\therefore (x_1, x_2) = (-2/3, -1)$ は主問題の最適解

目次

- ① 線形計画問題の双対性：例
- ② 線形計画問題の双対性：一般論
- ③ 単体法の基本的な動き
- ④ 今日のまとめ

線形計画問題：最適解であることの判定

次の線形計画問題を考える

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x \\ \text{subject to} & Ax \geq b \end{array}$$

疑問

$Ax \geq b$ を満たす x (つまり許容解 x) が与えられたとき,
 x がこの問題の最適解であるかどうかを簡単に判定できるか?

注：「最適解であるかどうかを判定できる」ことが簡単でないと
「最適化問題を解く」ことも簡単にはできない

式変形により最適値の下界を計算する

$x \in \mathbb{R}^n$ は許容解であるとする

- ▶ 「 $Ax \geq b$ 」の第 i 行「 $a_{i\bullet}x \geq b_i$ 」に $y_i \geq 0$ を掛けて、和を計算すると

$$\sum_{i=1}^m y_i (a_{i\bullet}x) \geq \sum_{i=1}^m y_i b_i = b^\top y$$

- ▶ 書き換えると

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) x_j \geq b^\top y$$

- ▶ 仮に、任意の $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = c_j$ とすると

$$c^\top x = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \right) x_j \geq b^\top y$$

- ▶ \therefore 任意の許容解の目的関数値 $\geq b^\top y$

双対問題

この「 $b^\top y$ 」をできるだけ大きくしたい

双対問題

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = c_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

- ▶ これも線形計画問題
- ▶ 「できるだけ大きな下界を得る」という問題になっている
- ▶ 1行目の制約式「 $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = c_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$ 」は
 $A^\top y = c$ とも書ける

双対問題：別の書き方

双対問題：別の書き方

 $y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

主問題と双対問題

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$$

主問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b \end{array}$$

双対問題

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

主問題と双対問題の目的関数値

- ▶ $x \in \mathbb{R}^n$ が主問題の許容解, $y \in \mathbb{R}^m$ が双対問題の許容解 \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 c^\top x &= (A^\top y)^\top x && (\because A^\top y = c) \\
 &= (y^\top A)x && (\text{転置行列の性質}) \\
 &= y^\top (Ax) && (\text{行列積の結合法則}) \\
 &\geq y^\top b && (\because y \geq 0, Ax \geq b) \\
 &= b^\top y && (\because y^\top b \text{ はスカラー})
 \end{aligned}$$

- ▶ \therefore 主問題の任意の許容解と双対問題の任意の許容解に対して

$$\boxed{\text{主問題の目的関数値}} \geq \boxed{\text{双対問題の目的関数値}}$$

- ▶ 特に

$$\boxed{\text{主問題の最適値}} \geq \boxed{\text{双対問題の最適値}}$$

許容解の最適性

- ▶ 仮に，主問題の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ と双対問題の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が

$$c^T x^* = b^T y^*$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

を満たすとする

- ▶ このとき，主問題の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$c^T x^* = b^T y^* \leq c^T x$$

- ▶ 双対問題の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$b^T y^* = c^T x^* \geq b^T y$$

- ▶ $\therefore x^*$ は主問題の最適解， y^* は双対問題の最適解

備忘録：主問題の任意の許容解と双対問題の任意の許容解に対して

$$\boxed{\text{主問題の目的関数値}} \geq \boxed{\text{双対問題の目的関数値}}$$

線形計画問題の (弱) 双対性：ここまでのまとめ

所与

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$b \in \mathbb{R}^m,$$

$$c \in \mathbb{R}^n$$

主問題

 $x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \geq b \end{aligned}$$

双対問題

 $y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && b^\top y \\ & \text{subject to} && A^\top y = c, y \geq 0 \end{aligned}$$

弱双対性 (weak duality)

$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \text{ が主問題の許容解} \\ y \in \mathbb{R}^m \text{ が双対問題の許容解} \end{array} \right\} \Rightarrow c^\top x \geq b^\top y$$

弱双対性の帰結

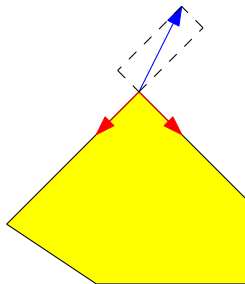
$$\left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \text{ が主問題の許容解} \\ y \in \mathbb{R}^m \text{ が双対問題の許容解} \\ c^\top x = b^\top y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ は主問題の最適解} \\ y \text{ は双対問題の最適解} \end{cases}$$

目次

- ① 線形計画問題の双対性：例
- ② 線形計画問題の双対性：一般論
- ③ 単体法の基本的な動き**
- ④ 今日のまとめ

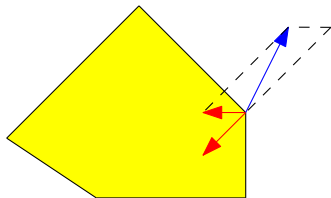
単体法とは?: 離散構造的な視点

- 1 許容領域の頂点を1つ見つける
- 2 その頂点において, 目的関数の方向ベクトルを超平面の法線ベクトルの線形結合で書く
- 3 結合係数がすべて非負ならば終了. その頂点が最適解
- 4 そうでなければ, 負となる係数が存在
- 5 その係数を持つ超平面を離れることで, 新しい頂点に移動する
- 6 これを繰り返す



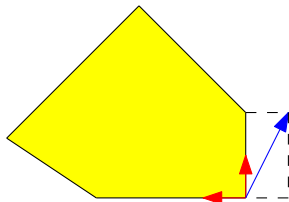
単体法とは?: 離散構造的な視点

- 1 許容領域の頂点を1つ見つける
- 2 その頂点において, 目的関数の方向ベクトルを超平面の法線ベクトルの線形結合で書く
- 3 結合係数がすべて非負ならば終了. その頂点が最適解
- 4 そうでなければ, 負となる係数が存在
- 5 その係数を持つ超平面を離れることで, 新しい頂点に移動する
- 6 これを繰り返す



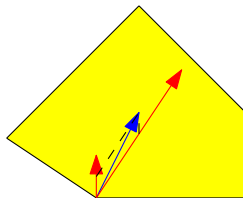
単体法とは?: 離散構造的な視点

- 1 許容領域の頂点を1つ見つける
- 2 その頂点において, 目的関数の方向ベクトルを超平面の法線ベクトルの線形結合で書く
- 3 結合係数がすべて非負ならば終了. その頂点が最適解
- 4 そうでなければ, 負となる係数が存在
- 5 その係数を持つ超平面を離れることで, 新しい頂点に移動する
- 6 これを繰り返す



単体法とは?: 離散構造的な視点

- 1 許容領域の頂点を1つ見つける
- 2 その頂点において, 目的関数の方向ベクトルを超平面の法線ベクトルの線形結合で書く
- 3 結合係数がすべて非負ならば終了. その頂点が最適解
- 4 そうでなければ, 負となる係数が存在
- 5 その係数を持つ超平面を離れることで, 新しい頂点に移動する
- 6 これを繰り返す



単体法：例題 (1)

この線形計画問題を単体法で解いてみる

 $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{subject to} & -2x_1 \geq -4, -x_1 - 2x_3 \geq -8, -3x_2 - x_3 \geq -6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

まず、許容領域の頂点を1つ見つけないといけない

- ▶ $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ は頂点である
 - ▶ これは許容解である
 - ▶ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ の3つの制約を等号で満たす
 - ▶ これら3つの不等式が定める半空間の境界となる超平面は1点で交わる (その交わりが $(0, 0, 0)$ である)

注意：「許容領域の頂点を1つ見つける」というのは線形計画問題そのものを解くことと同じくらい難しいが、ここでは1つ見つけられているとして話を進める

単体法：例題 (2)

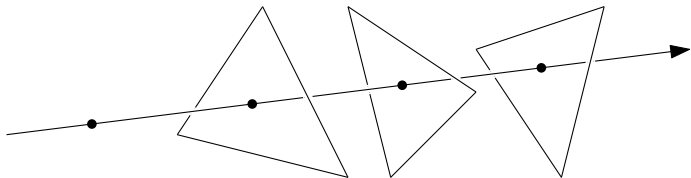
- ▶ 頂点 $(0, 0, 0)$ において，目的関数の方向ベクトルを線形結合で表してみる

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ これは非負線形結合ではない
- ▶ 係数が負であるところを見つける (例えば， $(1, 0, 0)$)
- ▶ 対応する超平面は $x_1 = 0$
- ▶ 動き： $x_2 = 0, x_3 = 0$ は保ったまま，次の頂点を見つける

次の頂点の見つけ方：素朴な方法

- ▶ $x_2 = 0, x_3 = 0$ は保つので，幾何学的には \mathbb{R}^n 中の直線に沿って動く
- ▶ 各制約の不等号を等号にしたものは超平面を表す
- ▶ この直線と超平面の共通部分は点である
- ▶ それらの点の中で許容解であるものは2つだけ
- ▶ 動いた元ではない方が動く先になる



単体法：例題 (3)

直線 $x_2 = 0, x_3 = 0$ と各超平面との交わりを見つける

- ▶ 超平面 $-2x_1 = -4$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$
- ▶ 超平面 $-x_1 - 2x_3 = -8$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (8, 0, 0)$
- ▶ 超平面 $-3x_2 - x_3 = -6$ との交わり：存在しない
- ▶ 超平面 $x_1 = 0$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ (移動元の頂点)

点 $(2, 0, 0)$ と $(8, 0, 0)$ の中で許容解であるのは $(2, 0, 0)$

- ▶ $\therefore (0, 0, 0)$ から $(2, 0, 0)$ に動く
- ▶ $(2, 0, 0)$ において等号で満たされる制約は

$$-2x_1 \geq -4, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

単体法：例題 (4)

- ▶ 頂点 $(2, 0, 0)$ において，目的関数の方向ベクトルを線形結合で表してみる

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ これは非負線形結合ではない
- ▶ 係数が負であるところを見つける (例えば， $(0, 1, 0)$)
- ▶ 対応する超平面は $x_2 = 0$
- ▶ 動き： $-2x_1 = -4, x_3 = 0$ は保ったまま，次の頂点を見つける

単体法：例題 (5)

直線 $-2x_1 = -4, x_3 = 0$ と各超平面との交わりを見つける

- ▶ 超平面 $-x_1 - 2x_3 = -8$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 0)$
- ▶ 超平面 $-3x_2 - x_3 = -6$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)$
- ▶ 超平面 $x_1 = 0$ との交わり：存在しない
- ▶ 超平面 $x_2 = 0$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$ (移動元の頂点)

点 $(2, 3, 0)$ と $(2, 2, 0)$ の中で許容解であるのは $(2, 2, 0)$

- ▶ $\therefore (2, 0, 0)$ から $(2, 2, 0)$ に動く
- ▶ $(2, 2, 0)$ において等号で満たされる制約は

$$-2x_1 \geq -4, -3x_2 - x_3 \geq -6, x_3 \geq 0$$

単体法：例題 (6)

- ▶ 頂点 $(2, 2, 0)$ において，目的関数の方向ベクトルを線形結合で表してみる

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ これは非負線形結合ではない
- ▶ 係数が負であるところを見つける (今回は $(0, 0, 1)$ のみ)
- ▶ 対応する超平面は $x_3 = 0$
- ▶ 動き： $-2x_1 = -4$, $-3x_2 - x_3 = -6$ は保ったまま，次の頂点を見つける

単体法：例題 (7)

直線 $-2x_1 = -4$, $-3x_2 - x_3 = -6$ と各超平面との交わりを見つける

- ▶ 超平面 $-x_1 - 2x_3 = -8$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$
- ▶ 超平面 $x_1 = 0$ との交わり：存在しない
- ▶ 超平面 $x_2 = 0$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 6)$
- ▶ 超平面 $x_3 = 0$ との交わり： $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)$ (移動元の頂点)

点 $(2, 1, 3)$ と $(2, 0, 6)$ の中で許容解であるのは $(2, 1, 3)$

- ▶ $\therefore (2, 0, 0)$ から $(2, 1, 3)$ に動く
- ▶ $(2, 1, 3)$ において等号で満たされる制約は

$$-2x_1 \geq -4, -3x_2 - x_3 \geq -6, -x_1 - 2x_3 \geq -8$$

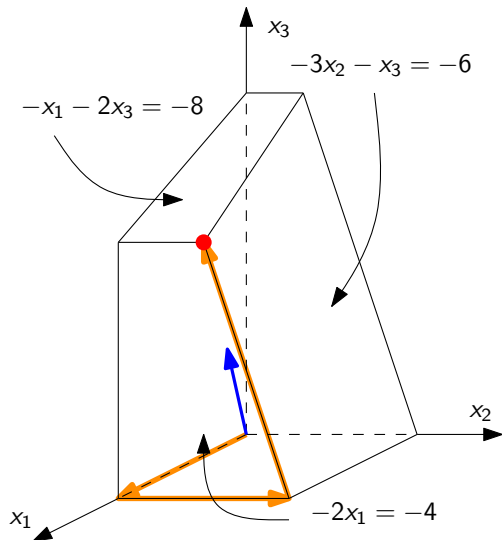
単体法：例題 (8)

- ▶ 頂点 $(2, 1, 3)$ において，目的関数の方向ベクトルを線形結合で表してみる

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- ▶ これは非負線形結合ではある (!)
- ▶ アルゴリズム終了
- ▶ $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3)$ は最適解

一応，図も描いてみた



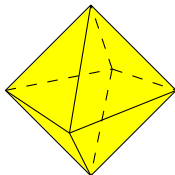
単体法について知られていること

基準形の線形計画問題に対して

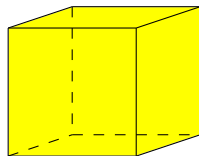
- ▶ 許容領域が縮退のない凸多面体である場合，単体法は有限時間で停止する
- ▶ 最適解が存在する場合，許容領域の頂点である最適解を出力する

縮退のない n 次元凸多面体とは？

- ▶ 任意の頂点に対して，その頂点を通るファセットの数がちょうど n であること



縮退のある凸多面体の例 ($n = 3$)



縮退のない凸多面体の例 ($n = 3$)

線形計画問題を解くアルゴリズムについて知られていること

線形計画問題は多項式時間で解くことができる

- ▶ 楕円体法 (Khachiyan '79)
- ▶ 内点法 (Karmarkar '84)

帰結

戦略形 2 人ゼロ和ゲームのナッシュ均衡は多項式時間で計算できる

線形計画問題を解くためのソルバーが数多く存在する
(Matlab, Mathematica, Excel でも解ける)

目次

- ① 線形計画問題の双対性：例
- ② 線形計画問題の双対性：一般論
- ③ 単体法の基本的な動き
- ④ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日やったこと

線形計画問題の離散構造を理解する

- ▶ 線形計画問題の (弱) 双対性
- ▶ 線形計画問題に対する単体法

注意

今回の講義における単体法の説明は、普通の教科書に書いてあるものと見た目上は大きく異なるが、本質は同じである

目次

- ① 線形計画問題の双対性：例
- ② 線形計画問題の双対性：一般論
- ③ 単体法の基本的な動き
- ④ 今日のまとめ