離散最適化基礎論 第 3 回
戦略形 2 人ゼロ和ゲーム：離散構造とアルゴリズム (1)

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 10 月 19 日

最終更新：2012 年 10 月 19 日　16:51

概要

目標

戦略形 2 人ゼロ和ゲームの離散構造を理解する

- **2 人ゼロ和ゲーム：プレイヤー数が 2，利得関数を足すと 0**
- **ナッシュ均衡計算法：戦略数が 3 以下の場合**
- **重要概念：凸多面体上の線形関数最小化 (線形計画問題)**

目次

1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. 混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合
4. 混合ナッシュ均衡の計算：別の例
5. 線形計画問題
6. 今日のまとめ

戦略形ゲーム：形式的な定義 — 復習

復習：戦略形ゲーム (定義)

戦略形ゲーム (strategic game) とは次の 3 つから構成される．

- プレイヤーの集合 N
- 各プレイヤー $i \in N$ に対する戦略の集合 A_i
- 各プレイヤー $i \in N$ に対する利得関数 $f_i \colon A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$
  - 2 人ゲームのときは利得行列とも呼ばれる

戦略形ゲームをこれらの組 $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ で表現

戦略形ゲームを考えるときの目標

各プレイヤーがどのような戦略を取るのか考える

最適反応戦略：定義 — 復習

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$：戦略形ゲーム，$N = \{1, \ldots, n\}$，$n$：自然数

最適反応戦略とは？（復習）

- プレイヤー $i \in N$ を固定
- i 以外のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 $a_j \in A_j$ を固定
- 各プレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 $a_j \in A_j$ に対する
  プレイヤー $i \in N$ の**最適反応戦略**とは

$$f_i(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \geq f_i(a_1, a_2, \ldots, a'_i, \ldots, a_n) \quad \forall\ a'_i \in A_i$$

  を満たす戦略 $a_i \in A_i$ のこと

混合戦略の下での利得 — 復習

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$：戦略形ゲーム，$N = \{1, \ldots, n\}$，$n$：自然数

- $\Delta(A_i)$：プレイヤー i の混合戦略全体の集合
- i の利得関数 $f_i \colon A_1 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$ を，
  以下の期待利得関数 $u_i \colon \Delta(A_1) \times \cdots \times \Delta(A_n) \to \mathbb{R}$ に拡張

$$u_i(s) = \sum_{a \in A_1 \times \cdots \times A_n} f_i(a) \cdot \prod_{j \in N} \Pr[\text{プレイヤー } j \text{ が } s_j \text{ において } a_j \text{ を選ぶ}]$$

ここで，$s = (s_1, \ldots, s_n), a = (a_1, \ldots, a_n)$

- $\Delta(A_i)$ の要素を混合戦略と呼ぶのに対して，
  A_i の要素を**純粋戦略** (pure strategy) と呼ぶ
- 純粋戦略は，ある戦略を確率 1 で選び，他の戦略を確率 0 で選ぶような混合戦略と同一視できる

最適反応混合戦略 — 復習

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$：戦略形ゲーム，$N = \{1, \ldots, n\}$，$n$：自然数

最適反応混合戦略 (best-response mixed strategy) とは？

- プレイヤー $i \in N$ を固定
- i 以外のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の混合戦略 $s_j \in \Delta(A_j)$ を固定
- 各プレイヤー $j \in N - \{i\}$ の混合戦略 $s_j \in \Delta(A_j)$ に対するプレイヤー $i \in N$ の**最適反応混合戦略**とは

$$f_i(s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \geq f_i(s_1, s_2, \ldots, s_i', \ldots, s_n) \quad \forall\ s_i' \in \Delta(A_i)$$

を満たす混合戦略 $s_i \in \Delta(A_i)$ のこと

混合ナッシュ均衡 — 復習

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$：戦略形ゲーム，$N = \{1, \ldots, n\}$，$n$：自然数

混合ナッシュ均衡 (mixed Nash equilibrium) とは？

- 各プレイヤー $i \in N$ の混合戦略 $s_i \in \Delta(A_i)$ を考える
- 混合戦略の組 $s = (s_1, \ldots, s_n)$ が混合ナッシュ均衡であるとは
  各プレイヤー $i \in N$ の戦略 s_i が
  他のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 s_j に対する最適反応であること

スケジュール

戦略形ゲームにおける混合ナッシュ均衡の計算

- 2 人ゲーム，戦略数 2 の場合　(前回)
- 2 人ゲーム，ゼロ和の場合　(今回，次回)
- 2 人ゲームの場合　(次々回，次々々回)

2 人ゲームの利得行列

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$：戦略形ゲーム

プレイヤー数が 2 の場合 (2 人ゲーム)

- $|A_1| = m, |A_2| = n$ と置く
- f_1 と f_2 は $m \times n$ 行列と見なせる (利得行列)
- f_1 に対応する行列を A，f_2 に対応する行列を B とする

例：男女の争い

男性の利得行列		女性 S	女性 C
男性	S	2	0
男性	C	0	1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

女性の利得行列		女性 S	女性 C
男性	S	1	0
男性	C	0	2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

戦略形 2 人ゼロ和ゲーム

$(\{1,2\},\{A_1,A_2\},\{A,B\})$：戦略形 2 人ゲーム

戦略形 2 人ゼロ和ゲーム (zero-sum game) とは？

$A+B=O$ であるような戦略形 2 人ゲーム

じゃんけんの利得行列 — これは戦略形 2 人ゼロ和ゲーム

P1 の利得行列		P2 G	P2 C	P2 P
	G	0	1	−1
P1	C	−1	0	1
	P	1	−1	0

P2 の利得行列		P2 G	P2 C	P2 P
	G	0	−1	1
P1	C	1	0	−1
	P	−1	1	0

目次

1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. 混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合
4. 混合ナッシュ均衡の計算：別の例
5. 線形計画問題
6. 今日のまとめ

例題：$m = 2, n = 2$ の場合

次の利得行列で表される戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

混合ナッシュ均衡を計算してみる

- **前回の方法でも計算できるが，今回は別の方法で計算してみる**

プレイヤーの期待利得

- Pr[プレイヤー 1 が戦略 1 を取る] $= x_1$,
  Pr[プレイヤー 1 が戦略 2 を取る] $= x_2$,
  Pr[プレイヤー 2 が戦略 1 を取る] $= y_1$,
  Pr[プレイヤー 2 が戦略 2 を取る] $= y_2$ とする
- $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ とすると (縦ベクトル)
- プレイヤー 1 の期待利得 $= x^\top Ay = 2x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2 = (2y_1 - y_2)x_1 + (-3y_1 + y_2)x_2$
- プレイヤー 2 の期待利得 $= x^\top By = -2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2 = (-2x_1 + 3x_2)y_1 + (x_1 - x_2)y_2$

備忘録：次の利得行列で表される戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

プレイヤー 1 が解く最適化問題

プレイヤー 1 が解く最適化問題

x_1, x_2 は変数，y_1, y_2 は定数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & (2y_1 - y_2)x_1 + (-3y_1 + y_2)x_2 \\ \text{subject to} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

y_1, y_2 の値によって最適解が変わる

- $2y_1 - y_2 \geq -3y_1 + y_2$ のとき，$x_1 = 1, x_2 = 0$ は最適解
- $2y_1 - y_2 \leq -3y_1 + y_2$ のとき，$x_1 = 0, x_2 = 1$ は最適解

プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続 1)

つまり，プレイヤー 1 が解く最適化問題は以下と同じ

プレイヤー 1 が解く最適化問題 — 再定式化

y_1, y_2 **は定数**

$$\text{maximize} \quad \max\{2y_1 - y_2, -3y_1 + y_2\}$$

これは次の問題と等価

$u \in \mathbb{R}$ **は変数，** y_1, y_2 **は定数**

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & u \\ \text{subject to} \quad & u \geq 2y_1 - y_2, \\ & u \geq -3y_1 + y_2 \end{aligned}$$

プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続 2)

いま考えている最適化問題

$u \in \mathbb{R}$ は変数，y_1, y_2 は定数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & u \geq 2y_1 - y_2, \\ & u \geq -3y_1 + y_2 \end{array}$$

この問題の最適解 u^* は次のどちらかを満たす

- $u^* = 2y_1 - y_2$
  - **このとき，$x_1^* = 1, x_2^* = 0$ はプレイヤー 1 の最適反応戦略**
- $u^* = -3y_1 + y_2$
  - **このとき，$x_1^* = 0, x_2^* = 1$ はプレイヤー 1 の最適反応戦略**

どちらのときも

- $x_1^*(u^* - 2y_1 + y_2) + x_2^*(u^* + 3y_1 - y_2) = 0$ **となる**

プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続 3)

いま考えている最適化問題

$u \in \mathbb{R}$ は変数，y_1, y_2 は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & u \\ \text{subject to} \quad & u \geq 2y_1 - y_2, \\ & u \geq -3y_1 + y_2 \end{aligned}$$

(x_1, x_2) が (y_1, y_2) に対する最適反応 $\Leftrightarrow$ ある $u \in \mathbb{R}$ が存在して

- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
- $u \geq 2y_1 - y_2, u \geq -3y_1 + y_2$
- $x_1(u - 2y_1 + y_2) + x_2(u + 3y_1 - y_2) = 0$

プレイヤー 2 が解く最適化問題

プレイヤー 2 が解く最適化問題

y_1, y_2 **は変数，** x_1, x_2 **は定数**

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & (-2x_1 + 3x_2)y_1 + (x_1 - x_2)y_2 \\
\text{subject to} & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1
\end{array}
$$

x_1, x_2 **の値によって最適解が変わる**

- $-2x_1 + 3x_2 \geq x_1 - x_2$ **のとき，** $y_1 = 1, y_2 = 0$ **は最適解**
- $-2x_1 + 3x_2 \leq x_1 - x_2$ **のとき，** $y_1 = 0, y_2 = 1$ **は最適解**

プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続)

つまり，プレイヤー 2 が解く最適化問題は以下と同じ

プレイヤー 2 が解く最適化問題 — 再定式化

x_1, x_2 は定数

$$\text{maximize} \quad \max\{-2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2\}$$

これは次の問題と等価

$v \in \mathbb{R}$ は変数，x_1, x_2 は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & v \\ \text{subject to} \quad & v \geq -2x_1 + 3x_2, \\ & v \geq x_1 - x_2 \end{aligned}$$

プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続 2)

いま考えている最適化問題

$v \in \mathbb{R}$ は変数，x_1, x_2 は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & v \\ \text{subject to} \quad & v \geq -2x_1 + 3x_2, \\ & v \geq x_1 - x_2 \end{aligned}$$

この問題の最適解 v^* は次のどちらかを満たす

- $v^* = -2x_1 + 3x_2$
  - **このとき，$y_1^* = 1, y_2^* = 0$ はプレイヤー 2 の最適反応戦略**
- $v^* = x_1 - x_2$
  - **このとき，$y_1^* = 0, y_2^* = 1$ はプレイヤー 2 の最適反応戦略**

どちらのときも

- $y_1^*(v^* + 2x_1 - 3x_2) + y_2^*(v^* - x_1 + x_2) = 0$ **となる**

プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続 3)

いま考えている最適化問題

$v \in \mathbb{R}$ は変数，x_1, x_2 は定数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq -2x_1 + 3x_2, \\ & v \geq x_1 - x_2 \end{array}$$

(y_1, y_2) が (x_1, x_2) に対する最適反応 $\Leftrightarrow$ ある $v \in \mathbb{R}$ が存在して

- $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1$
- $v \geq -2x_1 + 3x_2,\ v \geq x_1 - x_2$
- $y_1(v + 2x_1 - 3x_2) + y_2(v - x_1 + x_2) = 0$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件

(x_1, x_2) と (y_1, y_2) の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$
2. $u \geq 2y_1 - y_2, u \geq -3y_1 + y_2$
3. $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1 + y_2 = 1$
4. $v \geq -2x_1 + 3x_2,\ v \geq x_1 - x_2$
5. $x_1(u - 2y_1 + y_2) + x_2(u + 3y_1 - y_2) = 0$
6. $y_1(v + 2x_1 - 3x_2) + y_2(v - x_1 + x_2) = 0$

注：ここまでの議論では，ゲームがゼロ和であることを使っていない

式を操作してみる (1)

x_1, x_2, y_1, y_2, u, v が式 1 〜 6 を満たすと仮定

- 第 5 式を展開すると

$$x_1 u - 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 u + 3x_2 y_1 - x_2 y_2 = 0$$

- 整理すると

$$(x_1 + x_2)u = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + x_2 y_2$$

- 第 1 式 $(x_1 + x_2 = 1)$ より

$$u = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + x_2 y_2 = \text{プレイヤー 1 の期待利得}$$

式を操作してみる (2)

x_1, x_2, y_1, y_2, u, v が式 1 〜 6 を満たすと仮定

- 第 6 式を展開すると

$$y_1 v + 2x_1 y_1 - 3x_2 y_1 + y_2 v - x_1 y_2 + x_2 y_2 = 0$$

- 整理すると

$$(y_1 + y_2)v = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_2$$

- 第 3 式 $(y_1 + y_2 = 1)$ より

$$v = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_2 = \text{プレイヤー 2 の期待利得} = -u$$

注：$v = -u$ となるのは，ゲームがゼロ和だから

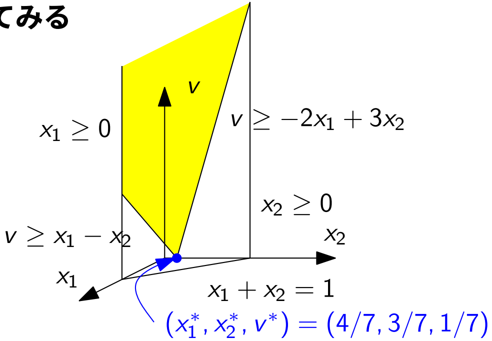
プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の期待利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

x_1, x_2, v が変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq -2x_1 + 3x_2, v \geq x_1 - x_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

図を描いて解いてみる



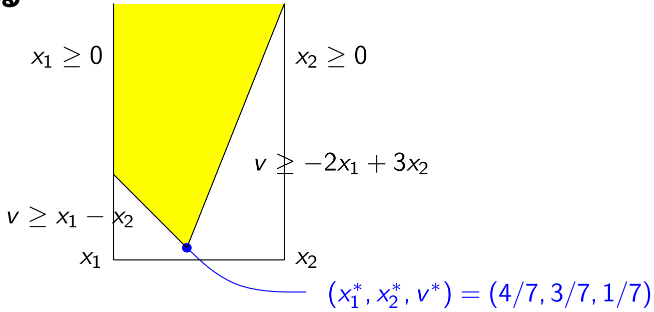
プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の期待利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

x_1, x_2, v が変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq -2x_1 + 3x_2, v \geq x_1 - x_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

図を描いて解いてみる



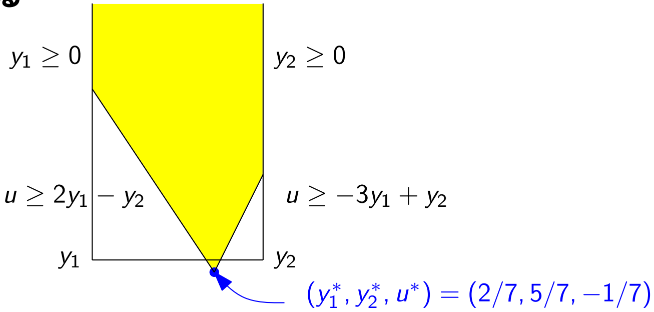
プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の期待利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

y_1, y_2, u が変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & u \\ \text{subject to} \quad & u \geq 2y_1 - y_2, u \geq -3y_1 + y_2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1 \end{aligned}$$

図を描いて解いてみる



2 つの最適化問題の最適解と混合ナッシュ均衡 (1)

$(x_1^*, x_2^*, v^*) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ と $(y_1^*, y_2^*, u^*) = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ は次を満たす

1. $x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_1^* + x_2^* = 1$
2. $u^* \geq 2y_1^* - y_2^*, u^* \geq -3y_1^* + y_2^*$
3. $y_1^* \geq 0,\ y_2^* \geq 0,\ y_1^* + y_2^* = 1$
4. $v^* \geq -2x_1^* + 3x_2^*,\ v^* \geq x_1^* - x_2^*$
5. $x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) = 0$
6. $y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) = 0$

第 1 式：

$$x_1^* = 4/7 \geq 1, \quad x_2^* = 3/7 \geq 1, \quad x_1^* + x_2^* = 4/7 + 3/7 = 1$$

2 つの最適化問題の最適解と混合ナッシュ均衡 (2)

$(x_1^*, x_2^*, v^*) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ と $(y_1^*, y_2^*, u^*) = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ は次を満たす

1. $x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_1^* + x_2^* = 1$
2. $u^* \geq 2y_1^* - y_2^*, u^* \geq -3y_1^* + y_2^*$
3. $y_1^* \geq 0,\ y_2^* \geq 0,\ y_1^* + y_2^* = 1$
4. $v^* \geq -2x_1^* + 3x_2^*,\ v^* \geq x_1^* - x_2^*$
5. $x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) = 0$
6. $y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) = 0$

第 2 式：

$$
\begin{aligned}
u^* &= -1/7 = 2 \cdot 2/7 - 5/7 = 2y_1^* - y_2^* \\
u^* &= -1/7 = -3 \cdot 2/7 + 5/7 = -3y_1^* + y_2^*
\end{aligned}
$$

2 つの最適化問題の最適解と混合ナッシュ均衡 (3)

$(x_1^*, x_2^*, v^*) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ と $(y_1^*, y_2^*, u^*) = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ は次を満たす

1. $x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_1^* + x_2^* = 1$
2. $u^* \geq 2y_1^* - y_2^*, u^* \geq -3y_1^* + y_2^*$
3. $y_1^* \geq 0,\ y_2^* \geq 0,\ y_1^* + y_2^* = 1$
4. $v^* \geq -2x_1^* + 3x_2^*,\ v^* \geq x_1^* - x_2^*$
5. $x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) = 0$
6. $y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) = 0$

第 3 式：

$$y_1^* = 2/7 \geq 0, \quad y_2^* = 5/7 \geq 0, \quad y_1^* + y_2^* = 2/7 + 5/7 = 1$$

2 つの最適化問題の最適解と混合ナッシュ均衡 (4)

$(x_1^*, x_2^*, v^*) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ と $(y_1^*, y_2^*, u^*) = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ は次を満たす

1. $x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_1^* + x_2^* = 1$
2. $u^* \geq 2y_1^* - y_2^*, u^* \geq -3y_1^* + y_2^*$
3. $y_1^* \geq 0,\ y_2^* \geq 0,\ y_1^* + y_2^* = 1$
4. $v^* \geq -2x_1^* + 3x_2^*,\ v^* \geq x_1^* - x_2^*$
5. $x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) = 0$
6. $y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) = 0$

第 4 式：

$$
\begin{aligned}
v^* &= 1/7 = -2 \cdot 4/7 + 3 \cdot 3/7 = -2x_1^* + 3x_2^* \\
v^* &= 1/7 = 4/7 - 3/7 = x_1^* + x_2^*
\end{aligned}
$$

2 つの最適化問題の最適解と混合ナッシュ均衡 (5)

$(x_1^*, x_2^*, v^*) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ と $(y_1^*, y_2^*, u^*) = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ は次を満たす

1. $x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_1^* + x_2^* = 1$
2. $u^* \geq 2y_1^* - y_2^*, u^* \geq -3y_1^* + y_2^*$
3. $y_1^* \geq 0,\ y_2^* \geq 0,\ y_1^* + y_2^* = 1$
4. $v^* \geq -2x_1^* + 3x_2^*,\ v^* \geq x_1^* - x_2^*$
5. $x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) = 0$
6. $y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) = 0$

第 5 式：

$$
\begin{aligned}
& x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) \\
= \ & \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{7}\right) + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{2}{7} - \frac{5}{7}\right) = 0
\end{aligned}
$$

2 つの最適化問題の最適解と混合ナッシュ均衡 (6)

$(x_1^*, x_2^*, v^*) = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ と $(y_1^*, y_2^*, u^*) = (\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ は次を満たす

1. $x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_1^* + x_2^* = 1$
2. $u^* \geq 2y_1^* - y_2^*, u^* \geq -3y_1^* + y_2^*$
3. $y_1^* \geq 0,\ y_2^* \geq 0,\ y_1^* + y_2^* = 1$
4. $v^* \geq -2x_1^* + 3x_2^*,\ v^* \geq x_1^* - x_2^*$
5. $x_1^*(u^* - 2y_1^* + y_2^*) + x_2^*(u^* + 3y_1^* - y_2^*) = 0$
6. $y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) = 0$

第 6 式：

$$
\begin{aligned}
& y_1^*(v^* + 2x_1^* - 3x_2^*) + y_2^*(v^* - x_1^* + x_2^*) \\
= \ & \frac{2}{7}\left(\frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{4}{7} - 3 \cdot \frac{3}{7}\right) + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{7} - \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\right) = 0
\end{aligned}
$$

ここまでのまとめ

次の 2 つの最適化問題を解く

x_1, x_2, v が変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq -2x_1 + 3x_2, v \geq x_1 - x_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

y_1, y_2, u が変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & u \geq 2y_1 - y_2, u \geq -3y_1 + y_2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ **最適解が混合ナッシュ均衡を与える**

目次

1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. **混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合**
4. 混合ナッシュ均衡の計算：別の例
5. 線形計画問題
6. 今日のまとめ

戦略形 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡：準備

$(\{1,2\},\{A_1,A_2\},\{A,B\})$：戦略形 2 人ゲーム，$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

備忘録：戦略形 2 人ゼロ和ゲーム (zero-sum game) とは？

$A+B=O$ であるような戦略形 2 人ゲーム

- プレイヤー 1 の戦略：$A_1 = \{1,2,\dots,m\}$
- プレイヤー 2 の戦略：$A_2 = \{1,2,\dots,n\}$
- x_i = プレイヤー 1 が戦略 i を選ぶ確率 ($i \in \{1,\dots,m\}$)
  - $x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m$ とする (縦ベクトル)
- y_j = プレイヤー 2 が戦略 j を選ぶ確率 ($j \in \{1,\dots,n\}$)
  - $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ とする (縦ベクトル)
- プレイヤー 1 の期待利得 $= x^\top Ay$
- プレイヤー 2 の期待利得 $= x^\top By = -x^\top Ay$

記法

- 行列 A を構成する行ベクトルをそれぞれ $a_{1\bullet}, a_{2\bullet}, \ldots, a_{m\bullet}$ とする

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\quad a_{1\bullet} \quad} \\ \vdots \\ \boxed{\quad a_{m\bullet} \quad} \end{pmatrix}$$

- 行列 A を構成する列ベクトルをそれぞれ $a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, \ldots, a_{\bullet n}$ とする

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{\bullet 1}} & \cdots & \boxed{a_{\bullet n}} \end{pmatrix}$$

B についても同様

プレイヤー 1 が解く最適化問題

プレイヤー 1 が解く最適化問題

$x \in \mathbb{R}^m$ **は変数，** $y \in \mathbb{R}^n$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x^\top A y = \sum_{i=1}^{m} (a_{i\bullet} y) x_i \\ \text{subject to} & x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \end{array}$$

$y_1, \ldots, y_n$ **の値によって最適解が変わる**

- $a_{i^*\bullet} y \geq a_{i\bullet} y \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\})$ **のとき，**
  - $x_{i^*} = 1,\ x_i = 0\ (\forall\, i \neq i^*)$ **は最適解**

プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続 1)

つまり，プレイヤー 1 が解く最適化問題は以下と同じ

プレイヤー 1 が解く最適化問題 — 再定式化

$y \in \mathbb{R}^n$ **は定数**

$$\text{maximize} \quad \max\{a_{i\bullet}y \mid i \in \{1,\ldots,m\}\}$$

これは次の問題と等価

$u \in \mathbb{R}$ **は変数，** $y \in \mathbb{R}^n$ **は定数**

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & u \\ \text{subject to} \quad & u \geq a_{i\bullet}y \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\} \end{aligned}$$

プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続 2)

いま考えている最適化問題

$u \in \mathbb{R}$ は変数，$y \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & u \geq a_{i\bullet}y \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,m\} \end{array}$$

この問題の最適解 u^* に対して次が成り立つ

- ある $i \in \{1,\ldots,m\}$ が存在して，$u^* = a_{i\bullet}y$
  - このとき，$x_i^* = 1,\ x_{i'}^* = 0\ (\forall\, i' \neq i)$ はプレイヤー 1 の最適反応戦略

すなわち，必ず次が成り立つ

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^* \left(u^* - a_{i\bullet}y\right) = 0$

プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続 3)

いま考えている最適化問題

$u \in \mathbb{R}$ **は変数，** $y \in \mathbb{R}^n$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

$x \in \mathbb{R}^m$ **が** $y \in \mathbb{R}^n$ **に対する最適反応** $\Leftrightarrow$ **ある** $u \in \mathbb{R}$ **が存在して次が成立**

- $x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$
- $u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$
- $\sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - a_{i\bullet} y\right) = 0$

プレイヤー 2 が解く最適化問題

プレイヤー 2 が解く最適化問題

$y \in \mathbb{R}^n$ **は変数，** $x \in \mathbb{R}^m$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & x^\top By = \sum_{j=1}^{n} (b_{\bullet j}^\top x) y_j \\ \text{subject to} & y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{array}$$

$x_1, \ldots, x_m$ **の値によって最適解が変わる**

- $b_{\bullet j^*}^\top x \geq b_{\bullet j}^\top x \ \forall j \in \{1, \ldots, n\})$ **のとき，**
    - $y_{j^*} = 1,\ y_j = 0\ (\forall j \neq j^*)$ **は最適解**

プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続 1)

つまり，プレイヤー 2 が解く最適化問題は以下と同じ

プレイヤー 2 が解く最適化問題 — 再定式化

$x \in \mathbb{R}^m$ **は定数**

$$\text{maximize} \quad \max\{b_{\bullet j}^\top x \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

これは次の問題と等価

$v \in \mathbb{R}$ **は変数，** $x \in \mathbb{R}^m$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続 2)

いま考えている最適化問題

$v \in \mathbb{R}$ **は変数，** $x \in \mathbb{R}^m$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

この問題の最適解 v^* **に対して次が成り立つ**

- **ある** $j \in \{1, \ldots, n\}$ **が存在して，** $v^* = b_{\bullet j}^\top x$
  - **このとき，** $y_j^* = 1,\ y_{j'}^* = 0\ (\forall\, j' \neq j)$ **はプレイヤー 2 の最適反応戦略**

すなわち，必ず次が成り立つ

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j^* \left(v^* - b_{\bullet j}^\top x\right) = 0$

プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続 3)

いま考えている最適化問題

$v \in \mathbb{R}$ は変数，$x \in \mathbb{R}^m$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \end{array}$$

$y \in \mathbb{R}^n$ が $x \in \mathbb{R}^m$ に対する最適反応 $\Leftrightarrow$ ある $v \in \mathbb{R}$ が存在して次が成立

- $y \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
- $v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \left(v - b_{\bullet j}^\top x \right) = 0$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件

$x \in \mathbb{R}^m$ と $y \in \mathbb{R}^n$ の組が混合ナッシュ均衡を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$
2. $u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$
3. $y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
4. $v \geq b_{\bullet j}^{\top} x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$
5. $\sum_{i=1}^{m} x_i \left(u - a_{i\bullet} y\right) = 0$
6. $\sum_{j=1}^{n} y_j \left(v - b_{\bullet j}^{\top} x\right) = 0$

注：ここまでの議論は，ゲームがゼロ和であることを使っていない

式を操作してみる (1)

x, y, u, v が式 $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{6}$ を満たすと仮定

- 第 $\boxed{5}$ 式を展開すると

$$u\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i\bullet} y = 0$$

- 整理すると

$$u\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{i\bullet} y = x^\top A y$$

- 第 $\boxed{1}$ 式 ($\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$) より

$$u = x^\top A y = \text{プレイヤー } 1 \text{ の期待利得}$$

式を操作してみる (2)

x, y, u, v が式 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{6}$ を満たすと仮定

- 第 $\boxed{6}$ 式を展開すると

$$v \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y_j b_{\bullet j}^{\top} x = 0$$

- 整理すると

$$v \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j b_{\bullet j}^{\top} x = x^{\top} B y$$

- 第 $\boxed{3}$ 式 $(\sum_{j=1}^{n} y_j = 1)$ より

$$v = x^{\top} B y = \text{プレイヤー 2 の期待利得} = -u$$

注：$v = -u$ となるのは，ゲームがゼロ和 $(A = -B)$ だから

プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の期待利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

$x \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}$ **が変数**

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & v \\
\text{subject to} \quad & v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \\
& x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1
\end{aligned}
$$

この問題の最適解を $x^* \in \mathbb{R}^m, v^* \in \mathbb{R}$ **とする**

プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の期待利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

$y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ が変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & u \\ \text{subject to} \quad & u \geq a_{i\bullet} y \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \\ & y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{aligned}$$

この問題の最適解を $y^* \in \mathbb{R}^n, u^* \in \mathbb{R}$ とする

フォン・ノイマンの定理

定理 (von Neumann 1928)

この設定において，
$v^* = -u^*$ であり，x^*, y^*, v^*, u^* は式 1 〜 6 を満たす

これは「線形計画法の強双対定理」を用いると証明できる
(詳細は略)

帰結

先ほどの 2 つの最適化問題を解けば，混合ナッシュ均衡が得られる

目次

1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. 混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合
4. **混合ナッシュ均衡の計算：別の例**
5. 線形計画問題
6. 今日のまとめ

次の戦略形 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡を計算する

$(\{1,2\},\{A_1,A_2\},\{A,B\})$：**戦略形 2 人ゲーム，** $A,B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = -A$$

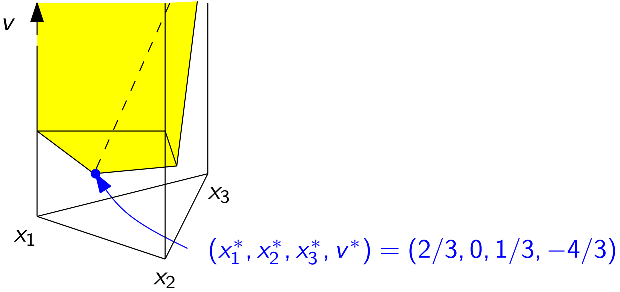
プレイヤー 1 の混合戦略を求める最適化問題

プレイヤー 1 の混合戦略を求める最適化問題

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}$ **が変数**

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq x_2 - 4x_3, v \geq -4x_1 - 2x_2 + 4x_3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array}$$

図を描いて解いてみる



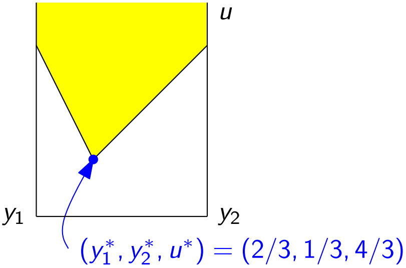
プレイヤー 2 の混合戦略を求める最適化問題

プレイヤー 2 の混合戦略を求める最適化問題

$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}$ **が変数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & u \geq 4y_2, u \geq -y_1 + 2y_2, u \geq 4y_1 - 4y_2, \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 = 1 \end{array}$$

図を描いて解いてみる



結論

- 混合ナッシュ均衡が唯 1 つ存在する
- その均衡において，
  - プレイヤー 1 の混合戦略は $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (2/3, 0, 1/3)$
  - プレイヤー 1 の期待利得は $-4/3$
  - プレイヤー 2 の混合戦略は $(y_1^*, y_2^*) = (2/3, 1/3)$
  - プレイヤー 2 の期待利得は $4/3$

目次

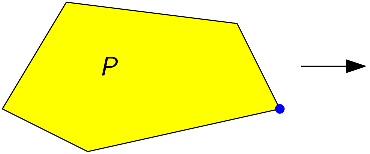
1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. 混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合
4. 混合ナッシュ均衡の計算：別の例
5. **線形計画問題**
6. 今日のまとめ

線形計画問題とは？

n：自然数

線形計画問題 (linear program) とは？

$\mathbb{R}^n$ における線形関数と凸多面体 P が与えられたとき，
その関数値を最小にするような P 上の点を見つける問題



混合ナッシュ均衡の計算：考えるべき凸多面体 (1)

プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の期待利得を小さくしようとする

$x \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}$ が変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq b_{\bullet j}^\top x \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ & x \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^m x_i = 1 \end{array}$$

考えるべき凸多面体は

$$P = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} v - b_{\bullet j}^\top x \geq 0 \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\}, \\ x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1 \end{array} \right\}$$

混合ナッシュ均衡の計算：考えるべき凸多面体 (2)

プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の期待利得を小さくしようとする

$y \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ **が変数**

$$\begin{array}{rll} \text{minimize} & u & \\ \text{subject to} & u \geq a_{i\bullet} y & \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \\ & y \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 & \end{array}$$

考えるべき凸多面体は

$$Q = \left\{ (y, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} u - a_{i\bullet} y \geq 0 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \\ y \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \end{array} \right\}$$

混合ナッシュ均衡の計算：解くべき線形計画問題

以上の設定で，解くべき問題が分かった

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & (x, v) \in P \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & (y, u) \in Q \end{array}$$

線形計画問題の基準形

- n を自然数として，$\mathbb{R}^n$ における凸多面体 P を考える
- P が行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ とベクトル $b \in \mathbb{R}^m$ を使って

$$P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

  と書けるとする
- 考える線形関数はベクトル $c \in \mathbb{R}^n$ を使って

$$c^\top x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

  と書けるとする

つまり，このとき線形計画問題は

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^\top x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

とかける (基準形 (canonical form) と呼ばれる)

基準形への変換 (例 1)

考える問題

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 = 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

基準形への変換

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4, -x_1 - x_2 \geq -4, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

基準形への変換 (例 2)

考える問題

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

基準形への変換

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 3x_1 - 2(x_2' - x_2'') \\ \text{subject to} & x_1 + x_2' - x_2'' \geq 4, \\ & x_1 \geq 0, x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0 \end{array}$$

- $x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2' = x_2,\ x_2'' = 0$
- $x_2 \leq 0 \Rightarrow x_2' = 0,\ x_2'' = -x_2$

線形計画問題の用語

基準形の線形計画問題

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array}$$

- **目的関数**：$c^\top x$
- **許容解**：$Ax \geq b, x \geq 0$ を満たす x
- **最適解**：許容解 x^* で次を満たすもの

$$c^\top x^* \leq c^\top x \quad \forall\, x\text{：許容解}$$

- **最適値**：最適解 x^* に対する $c^\top x^*$

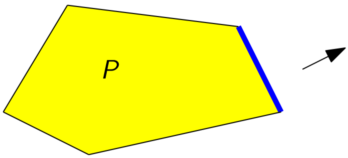
線形計画問題の基本的な性質 (1)

性質 1

非空な凸多面体 $P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ **上の線形計画問題**

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array}$$

に最適解が存在する $\Rightarrow$ **最適解全体の集合は** P **の面である**



線形計画問題の基本的な性質 (1)

性質 1

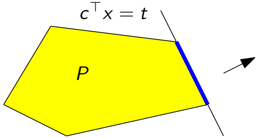
非空な凸多面体 $P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ 上の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array}$$

に最適解が存在する $\Rightarrow$ 最適解全体の集合は P の面である

証明：最適解が存在するので，それを x^* とする

- 最適値を $t = c^\top x^*$ とする
- つまり，任意の $x \in P$ に対して，$c^\top x \geq t$
- 不等式「$c^\top x \geq t$」は t に対する妥当不等式
- 最適解全体の集合は「$P \cap \{x \mid c^\top x = t\}$」
- 面の定義より，これは P の面 □



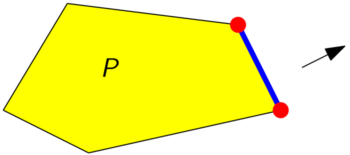
線形計画問題の基本的な性質 (2)

性質 2

非空な凸多面体 $P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ 上の基準形の線形計画問題

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b, x \geq 0 \end{array}$$

に最適解が存在する $\Rightarrow$ P の頂点であるような最適解が存在する



- 証明はややこしいので省略
- 注：この性質は「基準形」の線形計画問題であるから成り立つ (演習問題参照)

基本的な性質の帰結：アルゴリズムのアイディア

話の流れ

- 戦略形 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡を計算するためには線形計画問題の最適解が計算できればよい
- 線形計画問題の最適解として，凸多面体の頂点であるものが存在
- $\therefore$ 凸多面体の頂点を上手に探索する方法があればよい

$\rightsquigarrow$ 線形計画問題に対する単体法 (次回)

目次

1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. 混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合
4. 混合ナッシュ均衡の計算：別の例
5. 線形計画問題
6. 今日のまとめ

今日のまとめ

今日やったこと

戦略形 2 人ゼロ和ゲームの離散構造を理解する

- 2 人ゼロ和ゲーム：プレイヤー数が 2，利得関数を足すと 0
- ナッシュ均衡計算法：戦略数が 3 以下の場合
- 重要概念：凸多面体上の線形関数最小化 (線形計画問題)

次回やること

- 線形計画問題を解くためのアルゴリズム (単体法)

目次

1. 戦略形ゲーム 2 人ゼロ和ゲーム
2. 混合ナッシュ均衡の計算：$m = n = 2$ の場合
3. 混合ナッシュ均衡の計算：一般の場合
4. 混合ナッシュ均衡の計算：別の例
5. 線形計画問題
6. 今日のまとめ