

離散最適化基礎論 第 1 回  
ゲーム理論 はじめの一步

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 10 月 5 日

最終更新 : 2012 年 10 月 12 日 17:46

# 概要

## 目標

離散最適化のトピックの1つとして**ゲーム理論**を取り上げ

- ▶ ゲーム理論における数理的構造 (特に離散構造) を理解すること
- ▶ ゲーム理論におけるアルゴリズムを理解すること

## なぜ講義で取り扱う？

- ▶ ゲーム理論は人間生活における意思決定の基礎
- ▶ ゲーム理論を離散数理，アルゴリズムの視点から議論

## スケジュール 前半 (予定)

- |   |                       |         |
|---|-----------------------|---------|
| 1 | ゲーム理論はじめの一步           | (10/5)  |
| 2 | 戦略形ゲーム：基礎概念           | (10/12) |
| 3 | 戦略形 2 人ゼロ和ゲーム：離散構造論   | (10/19) |
| 4 | 戦略形 2 人ゼロ和ゲーム：アルゴリズム  | (10/26) |
| 5 | 戦略形 2 人非ゼロ和ゲーム：離散構造論  | (11/2)  |
| 6 | 戦略形 2 人非ゼロ和ゲーム：アルゴリズム | (11/9)  |
| 7 | 展開形ゲーム：基礎概念           | (11/16) |
| ★ | 休講 (調布祭)              | (11/23) |
| ★ | 休講 (国内出張)             | (11/30) |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |                       |              |
|----|-----------------------|--------------|
| 8  | 展開形 2 人完全記憶ゲーム：離散構造論  | (12/7)       |
| 9  | 展開形 2 人完全記憶ゲーム：アルゴリズム | (12/14)      |
| ★  | 休講 (海外出張)             | (12/21)      |
| ★  | 冬季休業                  | (12/18, 1/4) |
| 10 | 特性関数形ゲーム：基礎概念         | (1/11)       |
| ★  | 休講 (センター試験準備)         | (1/18)       |
| 11 | 特性関数形ゲームのコア：離散構造論     | (1/25)       |
| 12 | 特性関数形ゲームのコア：アルゴリズム    | (2/1)        |
| 13 | 最近 (?) のトピック          | (2/8)        |
| ★  | 期末試験                  | (2/15?)      |

注意：予定の変更もありうる

## 情報

## 教員

- ▶ 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- ▶ 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- ▶ E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- ▶ Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

## 講義資料

- ▶ Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2012/gametheory/
- ▶ 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- ▶ 講義当日の昼 12 時まで、ここに置かれる

## 講義資料

<http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2012/gametheory/>

- ▶ スライド
- ▶ 印刷用スライド：8枚のスライドを1ページに収めたもの
- ▶ 演習問題

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

## 授業の進め方

### 講義 (75 分)

- ▶ スライドと板書で進める
- ▶ スライドのコピーに重要事項のメモを取る

### 演習 (15 分)

- ▶ 演習問題に取り組む
- ▶ 不明な点は教員に質問する

### 退室 (0 分)

- ▶ 授業の感想などを小さな紙に書いて提出 (匿名可)

### オフィスアワー：金曜 2 限

- ▶ 質問など
- ▶ ただし、いないときもいるので注意

## 演習問題

### 演習問題の進め方

- ▶ 授業の最後 15 分は演習問題を解く時間
- ▶ 残った演習問題は復習・試験対策用
- ▶ 注意: 「模範解答」のようなものは存在しない

### 演習問題の種類

- ▶ 復習問題: 講義で取り上げた内容を反復
- ▶ 補足問題: 講義で省略した内容を補足
- ▶ 追加問題: 講義の内容に追加

### 解答の提出

- ▶ 演習問題の解答をレポートとして提出してもよい
- ▶ レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- ▶ レポートは添削されて, 返却される



## 評価

## 期末試験による

- ▶ 出題形式
  - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - ▶ その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同じである
  - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- ▶ 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- ▶ 時間：90 分 (おそらく)
- ▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

## 教科書・参考書

## 教科書

- ▶ 指定しない

## 全般的な参考書

- ▶ N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.V. Vazirani (eds.), “Algorithmic Game Theory,” Cambridge University Press, 2007.  
インターネット上でダウンロード可能
- ▶ Y. Shoham, K. Leyton-Brown, “Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations,” Cambridge University Press, 2009.  
<http://www.masfoundations.org/>からダウンロード可能
- ▶ 武藤滋夫, 「ゲーム理論入門」, 日経文庫, 2001.
- ▶ 岡田章, 「ゲーム理論(新版)」, 有斐閣, 2011.
- ▶ 渡辺隆裕, 「ゼミナール ゲーム理論入門」, 日本経済新聞出版社, 2008.
- ▶ その他, 講義内で提示.

## この講義の約束

- ▶ 私語はしない (ただし, 演習時間の相談は OK)
- ▶ 携帯電話はマナーモードにする
- ▶ 携帯電話は使わない
- ▶ 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

# 目次

- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面
- ⑥ 今日のまとめ

# 概要

## 目標

離散最適化のトピックの1つとして**ゲーム理論**を取り上げ

- ▶ ゲーム理論における数理的構造 (特に離散構造) を理解すること
- ▶ ゲーム理論におけるアルゴリズムを理解すること

## なぜ講義で取り扱う？

- ▶ ゲーム理論は人間生活における意思決定の基礎だから
- ▶ ゲーム理論を離散数理, アルゴリズムの視点から議論できるから

## ゲーム理論とは？

### ゲーム理論とは？

(岩波数学辞典第4版, 2007)

ゲーム理論は、利害の必ずしも一致しない複数の意思決定主体が存在する状況において、各主体がいかに行動すればよいかを数学的に分析する理論である。

### ポイント

- ▶ 「意思決定主体が複数存在する状況」を扱う
- ▶ 「数学的」に分析する理論

ゲーム理論は、広く「ゲーム」というものを捉えている

## ゲームとは？

### 普通の考え方

囲碁，将棋，チェス，ポーカー，麻雀，ドラゴンクエスト，...

### ゲームとは？

(岡田，1996)

- ▶ ゲーム理論の分析対象は，あらゆる**ゲーム的状况**である．
  - ▶ ゲーム的状况とは，複数の意思決定主体または行動主体が存在し，それぞれ一定の目的の実現を目指して相互に依存し合っている状况を意味する．
- ▶ ゲーム理論では，このようなゲーム的状况を数理的モデルを用いて定式化し，プレイヤーの間の利害の対立と協力を分析する．
- ▶ この数理的モデルを，ゲームという．

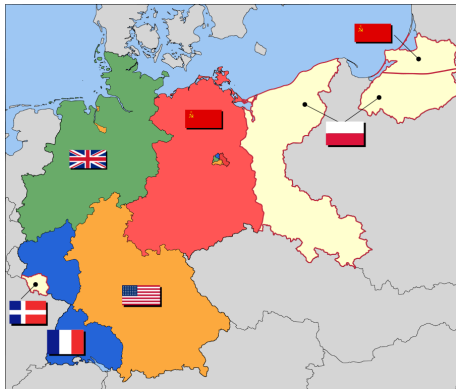
## ゲームの例：将棋



[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Shogi\\_Ban\\_Koma.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Shogi_Ban_Koma.jpg)



## ゲームの例：分断ドイツ



<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Map-Germany-1945.svg>

## ゲームの例：オークション



[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Auction\\_Tsukiji\\_fishmarket.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Auction_Tsukiji_fishmarket.jpg)

## 小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

## 囚人の刑期

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	10	0
自分が黙秘	20	5

## 小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

## 囚人の刑期

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	10	0
自分が黙秘	20	5

相手の出方が分からないとき

- ▶ 相手が自白する ⇒ 自分は自白した方が得

## 小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

## 囚人の刑期

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	10	0
自分が黙秘	20	5

相手の出方が分からないとき

- ▶ 相手が自白する ⇒ 自分は自白した方が得
- ▶ 相手が黙秘する ⇒ 自分は自白した方が得

## 小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

## 囚人の刑期

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	10	0
自分が黙秘	20	5

相手の出方が分からないとき

- ▶ 相手が自白する  $\Rightarrow$  自分は自白した方が得
- ▶ 相手が黙秘する  $\Rightarrow$  自分は自白した方が得
- ▶  $\therefore$  両者とも自白するのが得？ (刑期の合計 =  $10 + 10 = 20$ )

## 小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

## 囚人の刑期

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	10	0
自分が黙秘	20	5

相手の出方が分からないとき

- ▶ 相手が自白する  $\Rightarrow$  自分は自白した方が得
- ▶ 相手が黙秘する  $\Rightarrow$  自分は自白した方が得
- ▶  $\therefore$  両者とも自白するのが得？ (刑期の合計 =  $10 + 10 = 20$ )

前もって相談しておける場合

- ▶ 両者とも黙秘すれば得？ (刑期の合計 =  $5 + 5 = 10$ )

## 小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

## 囚人の刑期

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	10	0
自分が黙秘	20	5

相手の出方が分からないとき

- ▶ 相手が自白する  $\Rightarrow$  自分は自白した方が得
- ▶ 相手が黙秘する  $\Rightarrow$  自分は自白した方が得
- ▶  $\therefore$  両者とも自白するのが得？ (刑期の合計 =  $10 + 10 = 20$ )

前もって相談しておける場合

- ▶ 両者とも黙秘すれば得？ (刑期の合計 =  $5 + 5 = 10$ )

## 明確にしなくてはいけないこと

「得」とは何か？どういう意味で「得」なのか？



## ゲームの主な構成要素

- ▶ プレイヤー (エージェント)
- ▶ 戦略
- ▶ 時間
- ▶ 利得
- ▶ 協力の可能性/コミュニケーション/拘束

## ゲームの主な構成要素：プレイヤー

### プレイヤーとは？

意思決定し行動する主体のこと

人工知能の分野では「エージェント」と呼ばれることもある

### ここまでの例では

- ▶ 将棋：先手，後手
- ▶ 分断ドイツ：アメリカ，イギリス，フランス，ソ連
- ▶ オークション：買い手，(売り手)
- ▶ 囚人のジレンマ：囚人

### プレイヤー数によるゲームの分類

1人ゲーム，2人ゲーム， $\dots$ ， $n$ 人ゲーム

## ゲームの主な構成要素：戦略

### 戦略とは？

各プレイヤーの取り得る行動 (の計画) のこと

### ここまでの例では

- ▶ 将棋：着手 (2六歩, とか)
- ▶ オークション：入札 (買い手の戦略), 落札者決定 (売り手の戦略)
- ▶ 囚人のジレンマ：自白, 黙秘

### 戦略の数によるゲームの分類

有限ゲーム, 無限ゲーム

## ゲームの主な構成要素：時間

### ゲームにおける時間的要素とは？

- ▶ ゲームが1回限りのものか，何段階にもわたるのか
- ▶ 時間の流れにそって行われるものなのか
- ▶ その時間は離散的か，連続的か
- ▶ 終了時点が定まっているのか，いないのか

### ここまでの例では

- ▶ 将棋：離散的な時間にそって進行する
- ▶ オークション：連続的時間にそって進行する
- ▶ 囚人のジレンマ：1回限り

## ゲームの主な構成要素：利得

ゲームにおけるプレイヤーの利得 (payoff) とは？

ゲーム終了時に、プレイヤーが得る結果に対する評価値

ここまでの例では

- ▶ 将棋：勝敗
- ▶ 分断ドイツ：得られた土地に対する評価値
- ▶ オークション：競り落とせたか、支払金額
- ▶ 囚人のジレンマ：刑期

## ゲームの主な構成要素：協力の可能性/コミュニケーション/拘束

## ゲームにおけるコミュニケーション/拘束の役割

- ▶ 協力ゲーム (cooperative game)
  - ▶ 各プレイヤーがそのとるべき戦略を合意のうえで決定するゲーム
  - ▶ 合意に伴う「拘束」が重要
  - ▶ 提携の利得が基礎
- ▶ 非協力ゲーム (non-cooperative game)
  - ▶ 各プレイヤーがそのとるべき戦略を合意による決定ではなく、各自の独立な判断によって決定するゲーム
  - ▶ 個人の行動が基礎

## ここまでの例をどのように見る？

- ▶ 将棋，分断ドイツ，オークション，囚人のジレンマ

## ゲームの種類

- ▶ 非協力ゲーム (non-cooperative game)
  - ▶ 戦略形ゲーム (strategic game)
  - ▶ 展開形ゲーム (extensive game)
  - ▶ ...
- ▶ 協力ゲーム (cooperative game)
  - ▶ 特性関数形ゲーム (characteristic function game)
  - ▶ ...
- ▶ ...

# 目次

- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面
- ⑥ 今日のまとめ



## じゃんけん

勝ち = 1, あいこ = 0, 負け = -1 と表すと

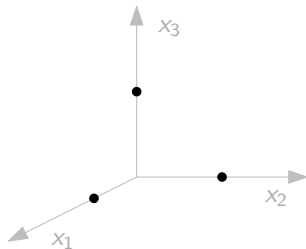
自分 \ 相手	グー	チョキ	パー
グー	0	1	-1
チョキ	-1	0	1
パー	1	-1	0

- ▶ 「最適」な戦略は**確率的**になる
- ▶ **凸多面体**を考えることが有効
  - ▶ 離散確率を扱うための道具
  - ▶ 最適化を行うための道具

## 確率的な戦略と三角形 (1)

「グー」、「チョキ」、「パー」の選択を3次元空間の点として表す

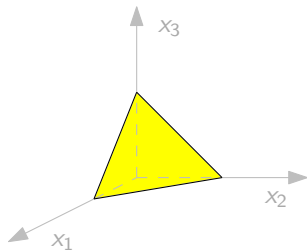
$$\text{グー} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{チョキ} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{パー} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## 確率的な戦略と三角形 (2)

三角形の中の点  $\rightsquigarrow$  確率的な戦略

$$\begin{pmatrix} \text{グーを出す確率} = 1/6 \\ \text{チョキを出す確率} = 1/3 \\ \text{パーを出す確率} = 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



# 目次

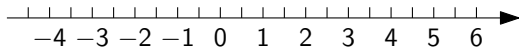
- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備**
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面
- ⑥ 今日のまとめ

## 実数

## 記法

実数全体の集合を  $\mathbb{R}$  で表す

$\mathbb{R}$  を数直線と同一視する

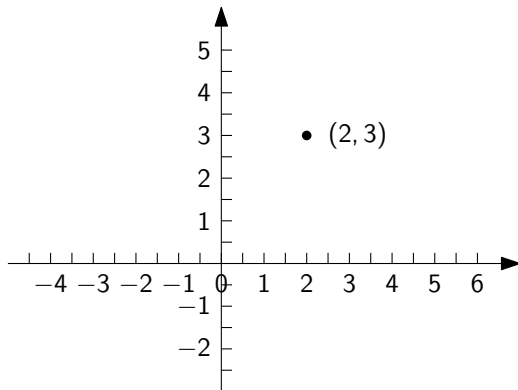


## 平面

## 平面

$\mathbb{R}^2$  は平面と同一視できる

$\mathbb{R}^2$  の点は  $(x_1, x_2)$  で表される



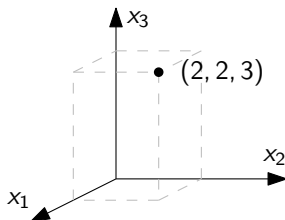
## $n$ 次元空間

$n$  : 自然数 (0 以上の整数)

### $n$ 次元空間

$\mathbb{R}^n$  は  $n$ 次元空間と同一視できる

$\mathbb{R}^n$  の点は  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  で表される



$n = 3$  のとき

以後,  $\mathbb{R}^n$  の  $n$  は自然数であると常に仮定

## 点の大小

 $\mathbb{R}^n$  上の順序関係  $\leq$ 2点  $\left\{ \begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$  に対して

$$x \leq y$$

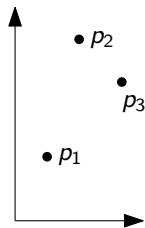
であることを,

任意の  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して,  $x_i \leq y_i$ 

であることと定義する

注意

(演習問題)

上で定義した  $\leq$  は  $\mathbb{R}^n$  上の半順序 $n = 2$  のとき

- ▶  $p_1 \leq p_2$
- ▶  $p_2 \not\leq p_1$
- ▶  $p_1 \leq p_3$
- ▶  $p_3 \not\leq p_1$
- ▶  $p_2 \not\leq p_3$
- ▶  $p_3 \not\leq p_2$



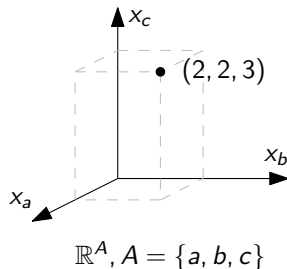
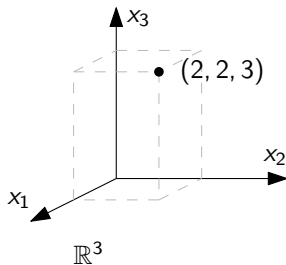
## 空間：別の表現

集合  $A$ 

## 記法

$\mathbb{R}^A$  とは  $(x_i \mid i \in A)$  という点全体の集合

$A$  が有限集合であり、 $|A| = n$  のとき、 $A = \{1, 2, \dots, n\}$  と名前を変えると  $\mathbb{R}^n$  と  $\mathbb{R}^A$  を同一視できる



## 空間：別の表現 (補足)

このスライドの内容は省略．興味のある人向け

- ▶ 一般に，集合  $A, B$  に対して  $B^A$  で， $A$  から  $B$  への関数全体の集合を表す
- ▶ つまり， $\mathbb{R}^A$  は  $A$  から  $\mathbb{R}$  への関数全体の集合
- ▶  $x \in \mathbb{R}^A$  を「関数」だと考えると，各  $i \in A$  に対して，対応する  $x_i \in \mathbb{R}$  が一意に決まる
- ▶ これを点  $(x_i \mid i \in A)$  として書いたのが前のスライドの内容

## 超平面

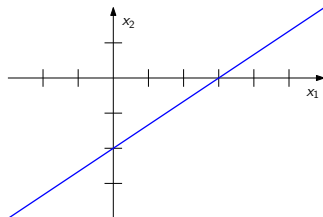
超平面 (hyperplane) とは？

ある  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  とある  $b \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b\}$$

と書ける集合のこと

$n = 2$  のとき :  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 = 6\}$



## 超平面

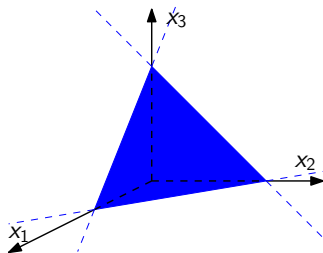
超平面 (hyperplane) とは？

ある  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  とある  $b \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b\}$$

と書ける集合のこと

$n = 3$  のとき :  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$

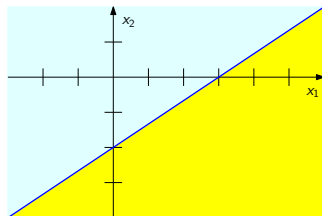


## 超平面による空間の分割

## 事実

$\mathbb{R}^n$  における任意の超平面は  $\mathbb{R}^n$  を次の 3 つの領域に分割

- ▶  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x > b\}$  (開半空間)
- ▶  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x = b\}$  (超平面)
- ▶  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x < b\}$  (開半空間)



これは中間値の定理を使えば証明できる

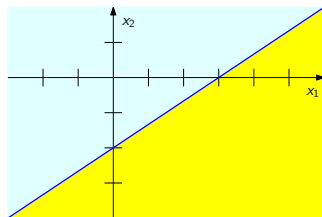
## 開半空間

開半空間 (open halfspace) とは？

ある  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  とある  $b \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x < b\}$$

と書ける集合のこと



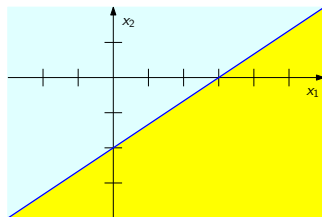
## 閉半空間

閉半空間 (closed halfspace) とは？

ある  $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$  とある  $b \in \mathbb{R}$  に対して

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\}$$

と書ける集合のこと

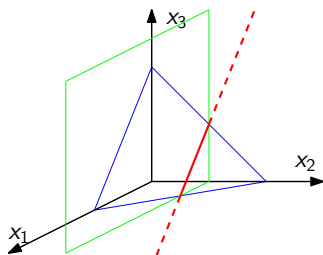


## アフィン部分空間

アフィン部分空間 (affine subspace) とは？

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  が  $\mathbb{R}^n$  のアフィン部分空間であるとは、  
 $A$  が  $\mathbb{R}^n$  における有限個の超平面の共通部分として書けること

$n = 3$  のとき： $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 = 1\}$





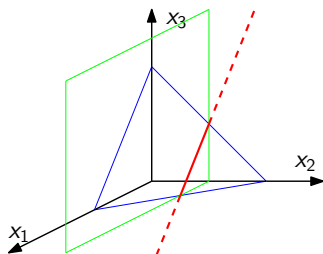
## アフィン部分空間の次元

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  :  $\mathbb{R}^n$  のアフィン部分空間

## アフィン部分空間の次元とは？

$A$  が  $\mathbb{R}^n$  における  $m$  個の超平面の共通部分として書けて、  
 $m - 1$  個の超平面の共通部分として書けないとき、  
 $A$  の次元を  $n - m$  と定める。

$n = 3$  のとき :  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1 = 1\}$



このアフィン部分空間の次元は1

## アフィン部分空間：注意

## アフィン部分空間の名前

- ▶ 点 (point)  $\mathbb{R}^n$  の 0 次元アフィン部分空間
- ▶ 直線 (line)  $\mathbb{R}^n$  の 1 次元アフィン部分空間
- ▶ 平面 (plane)  $\mathbb{R}^n$  の 2 次元アフィン部分空間
- ▶ 超平面  $\mathbb{R}^n$  の  $n - 1$  次元アフィン部分空間

## 便宜上

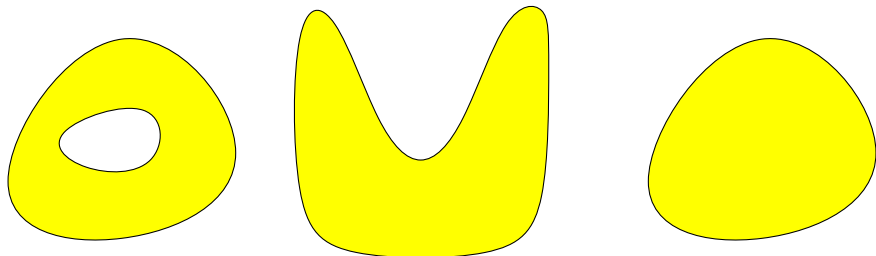
- ▶  $\mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^n$  の  $n$  次元アフィン部分空間とする
- ▶  $\emptyset$  は  $\mathbb{R}^n$  の  $-1$  次元アフィン部分空間とする

# 目次

- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備**
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面
- ⑥ 今日のまとめ

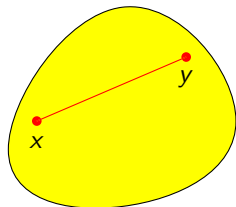
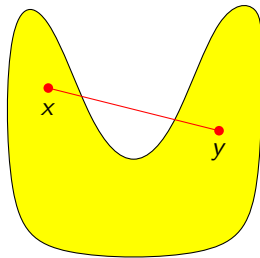
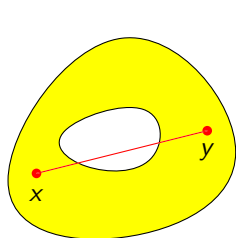
## 凸集合：直観

凸集合とは，穴や凹みのない集合



## 凸集合：直観 (2)

$S$  が凸集合であるとは、  
 $S$  の 2 点を結ぶ線分が  $S$  に含まれること



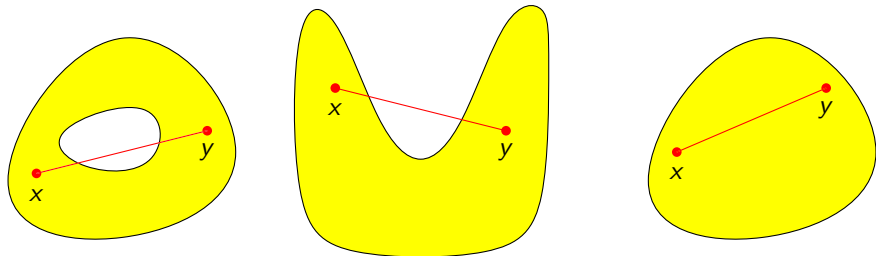
## 凸集合：定義

## 凸集合とは？

集合  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  が凸 (convex) であるとは，  
任意の  $x, y \in S$  と任意の  $\lambda \in [0, 1]$  に対して

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

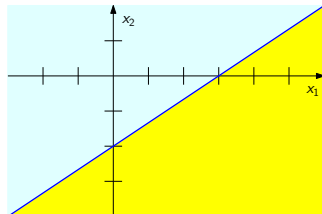
を満たすこと



## 凸集合の例

## 観察 (演習問題)

- ▶ 閉半空間は凸集合
- ▶ 開半空間は凸集合







## 凸集合の性質 1

## 観察

$S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  が凸  $\Rightarrow S \cap T$  も凸

証明 :

- ▶  $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  は凸であるとする .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  と  $\lambda \in [0, 1]$  を任意に選ぶ .
  
- ▶ したがって ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \cap T$  となる .
- ▶ したがって ,  $S \cap T$  は凸である .

## 凸集合の性質 1

## 観察

$S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  が凸  $\Rightarrow S \cap T$  も凸

証明 :

- ▶  $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  は凸であるとする .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  と  $\lambda \in [0, 1]$  を任意に選ぶ .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  なので ,  $x, y \in S$  かつ  $x, y \in T$  .
  
- ▶ したがって ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \cap T$  となる .
- ▶ したがって ,  $S \cap T$  は凸である .

## 凸集合の性質 1

## 観察

$S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  が凸  $\Rightarrow S \cap T$  も凸

証明 :

- ▶  $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  は凸であるとする .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  と  $\lambda \in [0, 1]$  を任意に選ぶ .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  なので ,  $x, y \in S$  かつ  $x, y \in T$  .
- ▶  $S$  は凸なので ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$  .
  
- ▶ したがって ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \cap T$  となる .
- ▶ したがって ,  $S \cap T$  は凸である .

## 凸集合の性質 1

## 観察

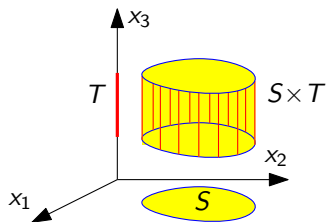
$S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  が凸  $\Rightarrow S \cap T$  も凸

証明 :

- ▶  $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  は凸であるとする .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  と  $\lambda \in [0, 1]$  を任意に選ぶ .
- ▶  $x, y \in S \cap T$  なので ,  $x, y \in S$  かつ  $x, y \in T$  .
- ▶  $S$  は凸なので ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$  .
- ▶  $T$  も凸なので ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in T$  .
- ▶ したがって ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \cap T$  となる .
- ▶ したがって ,  $S \cap T$  は凸である .

## 凸集合の性質 2

## 観察 (演習問題)

 $S \subseteq \mathbb{R}^n$  と  $T \subseteq \mathbb{R}^m$  が凸  $\Rightarrow S \times T \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  も凸

$$n = 2, m = 1$$

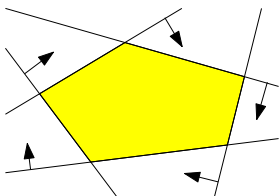
## 凸多面体とは？

## 凸多面体とは？

$P \subseteq \mathbb{R}^n$  が**凸多面体** (convex polyhedron) であるとは、  
 それが有限個の閉半空間の共通部分であること  
 すなわち、ある自然数  $m$  と  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  が存在して

$$P = \{x \mid a_i \cdot x \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

と書けること



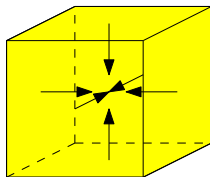
## 凸多面体とは？

## 凸多面体とは？

$P \subseteq \mathbb{R}^n$  が**凸多面体** (convex polyhedron) であるとは、  
 それが有限個の閉半空間の共通部分であること  
 すなわち、ある自然数  $m$  と  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  が存在して

$$P = \{x \mid a_i \cdot x \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

と書けること



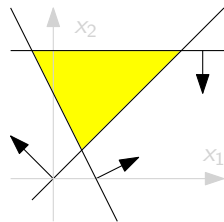
## 凸多面体：行列による表現

## 行列による凸多面体の表現

行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  , ベクトル  $b \in \mathbb{R}^m$  を

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_1} \\ \vdots \\ \boxed{a_m} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

として, 凸多面体  $P$  を  $P = \{x \mid Ax \leq b\}$  と表現できる



$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 0, \\ -2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_2 \leq 3 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$



## 凸多面体は凸集合

## 観察

凸多面体は凸集合である

証明 :

- ▶ 凸多面体は有限個の閉半空間の共通部分
- ▶ 閉半空間は凸
- ▶ 凸集合の共通部分は凸
- ▶  $\therefore$  凸多面体は凸



## 凸多面体：注意

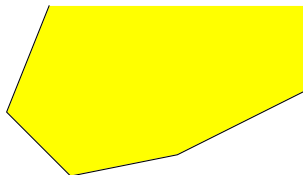
## 凸多面体とは？（再掲）

$P \subseteq \mathbb{R}^n$  が凸多面体であるとは、  
それが有限個の閉半空間の共通部分であること  
すなわち、ある自然数  $m$  と  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  が存在して

$$P = \{x \mid a_i \cdot x \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

と書けること

つまり、凸多面体は非有界であるかもしれない

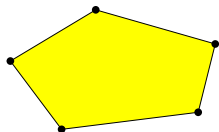


## 凸多面体の次元

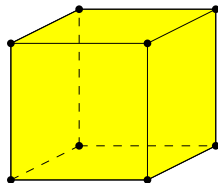
 $P \subseteq \mathbb{R}^n$  : 凸多面体

## 凸多面体の次元

$P$  の次元が  $r$  であるとは,  
 $P$  を含む最小のアフィン部分空間の次元が  $r$  であること.  
 $P$  の次元を  $\dim(P)$  で表す



$$\dim(P) = 2$$

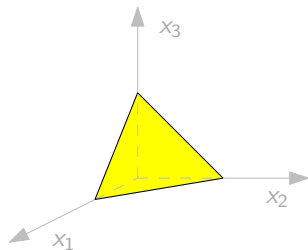


$$\dim(P) = 3$$

## 標準単体 — 確率を表す多面体

標準単体 (standard simplex) とは？

$$\Delta_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1, \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\} \end{array} \right\}$$

これは  $\Delta_2$

# 目次

- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面**
- ⑥ 今日のまとめ

## 妥当不等式

## 妥当不等式とは？

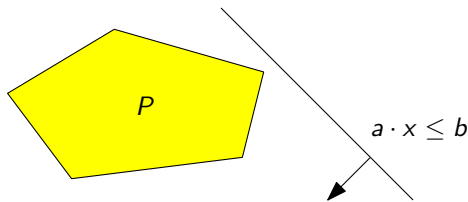
凸多面体  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  に対する妥当不等式とはある  $a \in \mathbb{R}^n$  と  $b \in \mathbb{R}$  を使って

$$a \cdot x \leq b$$

と書ける不等式で，

$$a \cdot z \leq b \quad \forall z \in P$$

を満たすもののこと



閉半空間  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\}$  が  $P$  を含む (ただし,  $a \neq 0$  のとき)

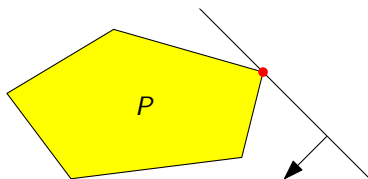
## 面

凸多面体の面 (face) とは？

凸多面体  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  の面とは,  
 $P$  に対する妥当不等式  $a \cdot x \leq b$  を使って

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\}$$

と書ける集合のこと



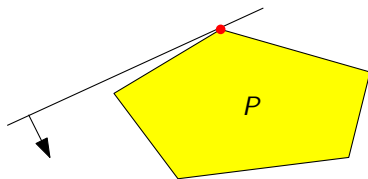
## 面

凸多面体の面 (face) とは？

凸多面体  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  の面とは,  
 $P$  に対する妥当不等式  $a \cdot x \leq b$  を使って

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\}$$

と書ける集合のこと





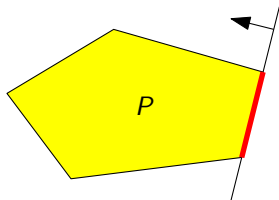
## 面

凸多面体の面 (face) とは？

凸多面体  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  の面とは,  
 $P$  に対する妥当不等式  $a \cdot x \leq b$  を使って

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\}$$

と書ける集合のこと



## 特別な面

$P \subseteq \mathbb{R}^n$  : 凸多面体

▶  $P$  は  $P$  の面

▶  $a = 0, b = 0$  とすれば,  $\{x \mid a \cdot x = b\} = \mathbb{R}^n$  なので

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\} = P \cap \mathbb{R}^n = P$$

▶  $\emptyset$  は  $P$  の面

▶  $a = 0, b = 1$  とすれば,  $\{x \mid a \cdot x = b\} = \emptyset$  なので

$$P \cap \{x \mid a \cdot x = b\} = P \cap \emptyset = \emptyset$$

## 凸多面体の面も凸多面体

## 観察

## 凸多面体の面は凸多面体

証明 :  $P$  を凸多面体,  $F \subseteq P$  を  $P$  の面とする .

- ▶  $F = P \cap \{x \mid a \cdot x = b\}$  とすると ,
- ▶  $F = P \cap \{x \mid a \cdot x \leq b\} \cap \{x \mid a \cdot x \geq b\}$
- ▶  $P$  は凸多面体なので ,  $P$  は有限個の閉半空間の共通部分 .
- ▶  $\therefore F$  も有限個の閉半空間の共通部分 .
- ▶  $\therefore F$  は凸多面体 .



## 頂点, 辺, 稜, ファセット

面も凸多面体なので, 面の次元を定義できる

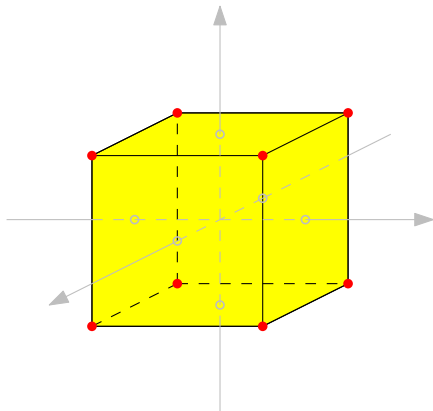
## 特別な名前を持つ面

$P$  :  $n$  次元多面体

- ▶  $\emptyset$  :  $-1$  次元面
- ▶ **頂点** (vertex) :  $0$  次元面
- ▶ **辺** (edge) :  $1$  次元面
- ▶ **稜** (ridge) :  $n-2$  次元面
- ▶ **ファセット** (facet) :  $n-1$  次元面
- ▶  $P$  :  $n$  次元面

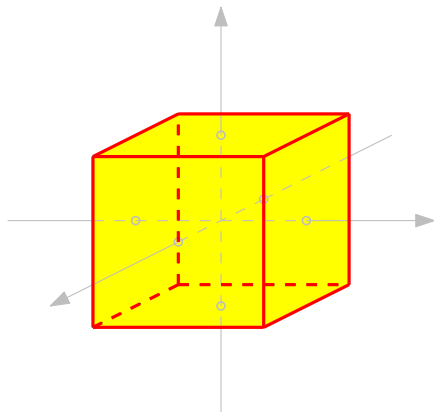
## 例：頂点

3次元立方体には頂点が8個ある



## 例：辺

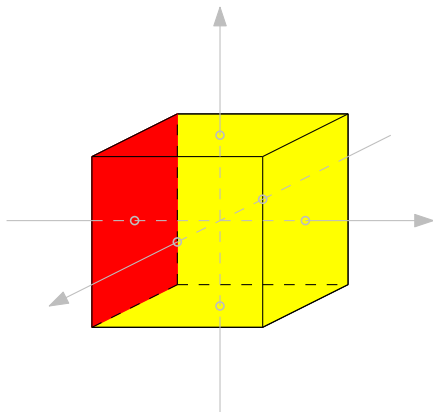
3次元立方体には辺が12個ある



3次元凸多面体では，辺 = 稜

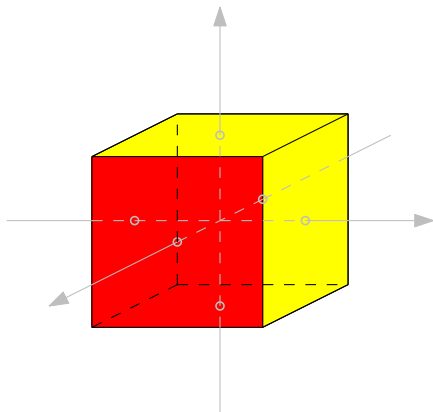
## 例：ファセット

3次元立方体ではファセットが6個ある



## 例：ファセット

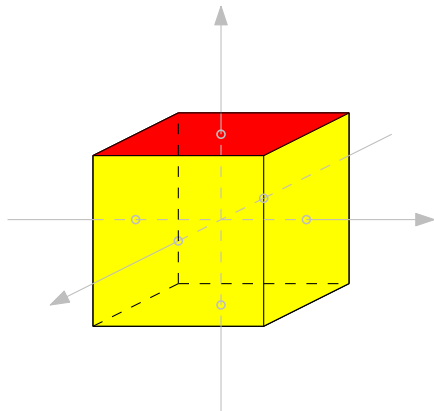
3次元立方体ではファセットが6個ある





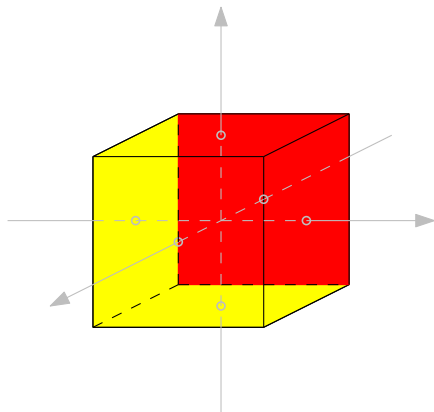
## 例：ファセット

3次元立方体ではファセットが6個ある



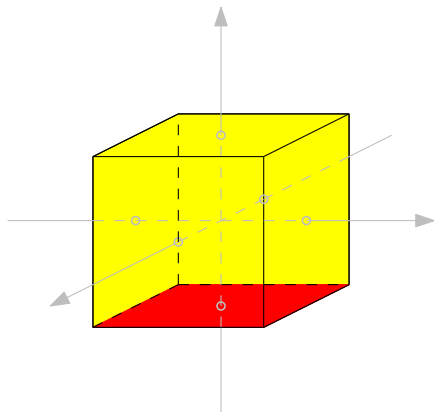
## 例：ファセット

3次元立方体ではファセットが6個ある



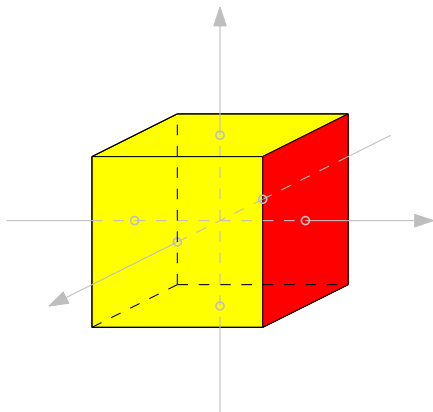
## 例：ファセット

3次元立方体ではファセットが6個ある



## 例：ファセット

3次元立方体ではファセットが6個ある



# 目次

- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面
- ⑥ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日やったこと

- ▶ ゲーム理論の射程
- ▶ 幾何学に関する準備 (特に, 凸多面体)

## その他 : GAMBIT

ゲーム理論に関する解を計算する (教育的) ソフトウェア

- ▶ <http://www.gambit-project.org/>

ダウンロード, インストール可能ならば, しておくとい

# 目次

- ① ゲーム理論の射程
- ② 離散構造との関わり合い
- ③ 幾何学に関する準備
- ④ 凸集合と凸多面体
- ⑤ 凸多面体の面
- ⑥ 今日のまとめ