離散最適化基礎論 第 13 回
オークション理論

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 2 月 8 日

最終更新：2013 年 2 月 21 日　01:26

概要

目標

オーククション理論に触れてみる

- 重要概念：耐戦略性
- 重要概念：第二価格オークション

目次

Böhm-Bawerk の馬市場 (1)

売り手は馬を持っていて，買い手は馬を一頭買いたい

売り手	評価額
S_1	10
S_2	11
S_3	15
S_4	17
S_5	20
S_6	21
S_7	25
S_8	26

買い手	評価額
B_1	30
B_2	28
B_3	26
B_4	24
B_5	22
B_6	21
B_7	20
B_8	18
B_9	17
B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (2)：価格からコアへ

コアの要素に従って決められる取引金額 p は一定

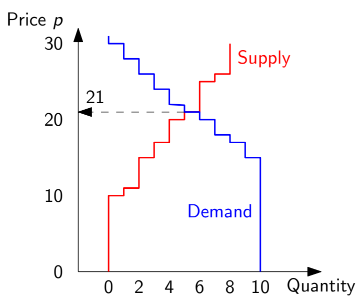
売り手	評価額
S_1	10
S_2	11
S_3	15
S_4	17
S_5	20
S_6	21
S_7	25
S_8	26

買い手	評価額
B_1	30
B_2	28
B_3	26
B_4	24
B_5	22
B_6	21
B_7	20
B_8	18
B_9	17
B_{10}	15

売り手は評価額以上の価格で売りたい

買い手は評価額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (3)：需要曲線と供給曲線



取引価格 21 で，馬が 5〜6 頭売買される

Böhm-Bawerk の馬市場 (4)：評価額と申告額

他の人の評価額を誰も知らず，価格は申告額から決められる

売り手	評価額	申告額
S_1	10	10
S_2	11	11
S_3	15	15
S_4	17	17
S_5	20	20
S_6	21	21
S_7	25	25
S_8	26	26

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18
B_9	17	17
B_{10}	15	15

売り手は申告額以上の価格で売りたい

買い手は申告額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (5)：虚偽の申告

売り手や買い手は戦略的に虚偽の申告を行うかもしれない

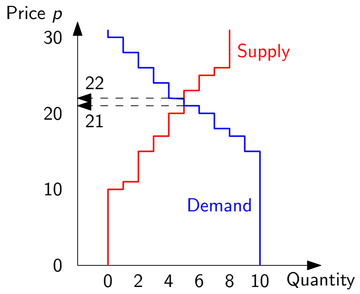
売り手	評価額	申告額
S_1	10	10
S_2	11	11
S_3	15	15
S_4	17	17
S_5	20	20
S_6	21	23
S_7	25	25
S_8	26	26

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18
B_9	17	17
B_{10}	15	15

売り手は申告額以上の価格で売りたい

買い手は申告額以下の価格で買いたい

Böhm-Bawerk の馬市場 (6)：需要曲線と供給曲線 — 虚偽の申告の結果



取引価格 21〜22 で，馬が 5 頭売買される
(売り手が虚偽の申告を行い，取引価格が上がった)

ここからの話

- 売り手も買い手も虚偽の申告を行わないように「強制」できるか？
- 注意：売り手も買い手も，自分の利得を最大化しようとする

考え方

虚偽の申告を行っても得をしないように，**制度を設計する**

- 「**メカニズムデザイン**」と呼ばれる考え方

メカニズムデザインの応用の 1 つとして
- オークション
  - 単一財オークション
  - ダブルオークション

目次

単一財封印入札オークション：設定

- 売り手 1 人 S_1：商品を 1 つ持っている
- 買い手 n 人 $B_1, \ldots, B_n$：S_1 の持っている商品を買いたい
- 買い手 B_i は商品に対する評価額 $v_i \geq 0$ を持っている (他の人は知らない)
- 買い手 B_i は商品に対する価値を S_1 に申告する $\leadsto$ 申告額 b_i (他の買い手は知らない)

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：考えなくてはならない問題

このとき，売り手 S_1 は次を決定する
- 勝者 (落札者)：どの買い手が商品を得るか？
- 価格：取引を行う価格をいくらにするか？

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：戦略

- 売り手 S_1 の戦略：どの買い手にいくらで売るかの選択
- 買い手 B_i の利得：申告額 b_i

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：利得

買い手 B_j が価格 p で落札したとする (ただし $p \leq b_j$)
- 売り手 S_1 の利得：p
- 買い手 B_i の利得
  - $i = j$ のとき (落札者のとき)：$v_j - p$
  - $i \neq j$ のとき (落札者ではないとき)：0

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

単一財封印入札オークション：仮定

- 売り手がどのように勝者と価格を決めるのかを買い手は全員知っている
- 売り手は買い手の評価額 $v_1, \ldots, v_n$ を知らないので申告額 $b_1, \ldots, b_n$ のみから勝者と価格を決める

これは売り手 1 人と買い手 n 人，合計 $n + 1$ 人のプレイヤーがいるゲーム

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18

売り手の利得を最大にする決め方は？

売り手が買い手全員の申告額を受け取る

- 例えば「適当に買い手を選んで，100 万円払ってもらう」と決める

買い手	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	28	100	−70
B_2	28	20	0	0
B_3	26	22	0	0
B_4	24	26	0	0
B_5	22	24	0	0
B_6	21	19	0	0
B_7	20	20	0	0
B_8	18	18	0	0

利得が負になるかもしれない
(そのようなオークションには誰も参加しない)

決め方が満たしていて欲しい性質：個人合理性

個人合理性

勝者 B_i の支払額 p は $p \leq b_i$ を満たす

B_i は b_i まで支払ってもよいと申告したのだから，
これは自然な性質

買い手	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	28	14	16
B_2	28	20	0	0
B_3	26	22	0	0
B_4	24	26	0	0
B_5	22	24	0	0
B_6	21	19	0	0
B_7	20	20	0	0
B_8	18	18	0	0

売り手の利得を最大にする決め方は？ take 2

売り手が買い手全員の申告額を受け取る

- 個人合理性：価格 p は勝者 B_i に対して $p \leq b_i$ を満たす
- つまり，$b_1, \ldots, b_n$ の中の最大値を p とすればよい

記法：$b = (b_1, \ldots, b_n)$ というベクトルの成分を大きい順に並べて，
$b[1] \geq b[2] \geq \cdots \geq b[n]$ と書く

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	28	2
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で，価格は $b[1] = 28$

第一価格オークション

第一価格オークション

$b_1, \ldots, b_n$ を受け取った売り手は次のように決める

- 勝者：$b_i = b[1]$ となる買い手 B_i
- 価格：$b[1]$

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	28	2
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で，価格は $b[1] = 28$

第一価格オークション：買い手はどう振る舞うのか？

- 買い手は低い申告額を言えば，安く買える
  - 申告額の「探り合い」がおこる

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	27	$b[1]$	27	3
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で，価格は $b[1] = 27 < 28$

決め方が満たしていてほしい性質：上位落札性と耐戦略性

上位落札性

勝者は最高申告額を持つ買い手である
(勝者は $b_i = b[1]$ となる買い手 B_i である)

上位落札性が満たされれば，売り手の利得を大きくできる

耐戦略性

任意の買い手 B_i にとって，他の買い手の申告額が何であろうと
B_i は自分の評価額 v_i を申告することが最適反応戦略

- 言い換えると，任意の $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n$ に対して

買い手の申告額が $b_1, \ldots, b_{i-1}, v_i, b_{i+1}, \ldots, b_n$ のときの B_i の利得	$\geq$	買い手の申告額が $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n$ のときの B_i の利得

耐戦略性が満たされれば，買い手が低い申告額を言う理由がなくなる

第一価格オークションの性質

- 第一価格オークションは個人合理性を満たす
- 第一価格オークションは上位落札性を満たす
- 第一価格オークションは耐戦略性を満たさない

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	27	$b[1]$	27	3
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

疑問

個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす決め方はあるのか？

第二価格オークション

第二価格オークション

$b_1, \ldots, b_n$ を受け取った売り手は次のように決める

- 勝者：$b_i = b[1]$ となる買い手 B_i
- 価格：$b[2]$ ← ここが重要

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	26	4
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

勝者は B_1 で，価格は $b[2] = 26$

第二価格オークションの性質

- 第二価格オークションは個人合理性を満たす (すぐ分かる)
- 第二価格オークションは上位落札性を満たす (すぐ分かる)
- 第二価格オークションは耐戦略性を満たす (どうして？)

買い手	評価額	申告額	並べ替え	支払額	利得
B_1	30	28	$b[1]$	26	4
B_2	28	20	$b[5]$	0	0
B_3	26	22	$b[4]$	0	0
B_4	24	26	$b[2]$	0	0
B_5	22	24	$b[3]$	0	0
B_6	21	19	$b[7]$	0	0
B_7	20	20	$b[6]$	0	0
B_8	18	18	$b[8]$	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (1)

- $b' = (b_1, \dots, b_{i-1}, v_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$ とする
- 任意の b_i に対して
  $b = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$ とする
- 2 つの場合がある
  - 申告額が b' であるとき，B_i が勝者である
  - 申告額が b' であるとき，B_i が勝者ではない

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[1]$)	26	4	28 ($b[1]$)	26	4
B_2	28	20 ($b'[5]$)	0	0	20 ($b[5]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[4]$)	0	0	22 ($b[4]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[2]$)	0	0	26 ($b[2]$)	0	0
B_5	22	24 ($b'[3]$)	0	0	24 ($b[3]$)	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (2)

申告額が b' であるとき，B_i が勝者であるとする (つまり，$b'[1] = v_i$)
- B_i の利得 $= v_i - b'[2] \geq 0$

申告額が b であるとき，
- B_i が勝者であるならば，B_i の利得 $= v_i - b[2] = v_i - b'[2]$
- B_i が勝者でないならば，B_i の利得 $= 0 \leq v_i - b'[2]$

つまり，B_i が申告額を v_i から b_i に変えても B_i の利得は増えない

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[1]$)	26	4	25 ($b[2]$)	0	0
B_2	28	20 ($b'[5]$)	0	0	20 ($b[5]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[4]$)	0	0	22 ($b[4]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[2]$)	0	0	26 ($b[1]$)	25	1
B_5	22	24 ($b'[3]$)	0	0	24 ($b[3]$)	0	0

第二価格オークションの耐戦略性：証明 (3)

申告額が b' であるとき，B_i が勝者ではないとする (つまり，$b'[1] \geq v_i$)
- B_i の利得 $= 0$

申告額が b であるとき，
- B_i が勝者であるならば，$b[1] = b_i, b[2] = b'[1]$
  $\therefore$ B_i の利得 $= v_i - b[2] \leq b'[1] - b[2] = b'[1] - b'[1] = 0$
- B_i が勝者でないならば，B_i の利得 $= 0$

つまり，B_i が申告額を v_i から b_i に変えても B_i の利得は増えない $\square$

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	30 ($b'[2]$)	0	0	34 ($b[1]$)	32	-2
B_2	28	32 ($b'[1]$)	30	-4	32 ($b[2]$)	0	0
B_3	26	22 ($b'[5]$)	0	0	22 ($b[5]$)	0	0
B_4	24	26 ($b'[3]$)	0	0	26 ($b[3]$)	0	0
B_5	22	24 ($b'[4]$)	0	0	24 ($b[4]$)	0	0

第一価格オークションと第二価格オークション：まとめ

第一価格オークション

決め方
- 勝者：$b_i = b[1]$ となる買い手 B_i，価格：$b[1]$

性質
- 個人合理性，上位落札性を満たすが，耐戦略性を満たさない

第二価格オークション

決め方
- 勝者：$b_i = b[1]$ となる買い手 B_i，価格：$b[2]$

性質
- 個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす

疑問

第二価格オークション以外に個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方はあるか？

第二価格オークションの持つ一意性

一意性

個人合理性，上位落札性，耐戦略性をすべて満たす決め方は
第二価格オークション以外に存在しない

ここでは，買い手が 2 人の場合にこの一意性を証明する
- 買い手 B_1, B_2 の申告額が b_1, b_2 であり，$b_1 > b_2$ の場合を考える
- ($b_1 = b_2$，$b_1 < b_2$ の場合も同様に証明できる)

では，個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方に従って，
勝者と価格 p を決定する
- 上位落札性より，勝者は B_1
- あとは価格 p が決まればよい

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$
B_2	28	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (1)

- B_1 が b_1' を申告したときを考える (ただし，$b_1' > b_2$)
- 依然，B_1 が勝者
- このときの価格を p' とする
- 成り立つこと：$p = p'$

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$
B_2	28	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (2)

$p = p'$ の証明
- $p' > p$ だとすると，
  $v_1 = b_1'$ であるとき，b_1' ではなく b_1 を申告すると利得が上がる
- これは耐戦略性に矛盾

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30 - p$	29	p'	$30 - p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	29	26	p	$29 - p$	29	p'	$29 - p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (3)

$p = p'$ の証明 (続き)

- $p' < p$ だとすると，
  $v_1 = b_1$ であるとき，b_1 ではなく b'_1 を申告すると利得が上がる
- これは耐戦略性に矛盾

したがって，$p = p'$

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	p	$30-p$	29	p'	$30-p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	26	26	p	$26-p$	29	p'	$26-p'$
B_2	28	20	0	0	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (4)

ここまでのまとめ

$b'_1 > b_1 \geq b_2$ ならば，

申告額が b_1, b_2 のときの価格 p = 申告額が b'_1, b_2 のときの価格 p'

- 個人合理性より，
$$p = p' \leq b'_1$$
- つまり，$b'_1 > b_2$ を満たす任意の b'_1 に対して $p \leq b'_1$
- このとき「$p \leq b_2$」となる
  - $p > b_2$ であるとすると，$p > b'_1 > b_2$ を満たす b'_1 が存在してしまい
    $p \leq b'_1$ に矛盾

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	$p \leq 20$	$30-p$
B_2	28	20	0	0

第二価格オークションの持つ一意性：証明 (5)

示したいこと

$p = b_2$

では，$p < b_2$ であると仮定する

- $p < b''_1 < b_2$ を満たす b''_1 を考え，$v_1 = b''_1$ の場合を考える
- B_2 が b_2 を申告するとき，
  - B_1 が b''_1 を申告 ⇒ 勝者は B_2 で，B_1 の利得 $= 0$
  - B_1 が b_1 を申告 ⇒ 勝者は B_1 で，B_1 の利得 $= b''_1 - p > 0$
- これは耐戦略性に矛盾 □

	評価額	申告額	支払額	利得
B_1	30	26	18	12
B_2	28	20	0	0

	評価額	申告額	支払額	利得	申告額	支払額	利得
B_1	19	26	18	1	19	0	0
B_2	28	20	0	0	20		

単一財封印入札オークション：まとめ

- 第一価格オークションは
  個人合理性，上位落札性を満たすが，耐戦略性は満たさない
- 第二価格オークションは
  個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす
- 逆に，個人合理性，上位落札性，耐戦略性を満たす決め方は
  第二価格オークションだけ

補足

封印入札オークションではなく，公開型オークションを考えると

- 競り上げ式オークション ≡ 第二価格オークション
- 競り下げ式オークション ≡ 第一価格オークション

目次

ダブルオークションとは？

売り手が持っている商品は全部同じで，売り手も入札を行う

売り手	評価額	申告額
S_1	10	10
S_2	11	11
S_3	15	15
S_4	17	17
S_5	20	20
S_6	21	21
S_7	25	25
S_8	26	26

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24
B_5	22	22
B_6	21	21
B_7	20	20
B_8	18	18
B_9	17	17
B_{10}	15	15

取引の仲介者がオークション主催者

ダブルオークション：記法

- 売り手 $S_1, \ldots, S_m$，買い手 $B_1, \ldots, B_n$
- 売り手 S_i の評価額 $v(S_i)$，買い手 B_j の評価額 $v(B_j)$
- 売り手 S_i の申告額 $b(S_i)$，買い手 B_j の申告額 $b(B_j)$

売り手	評価額	申告額
S_1	10	10
S_2	11	11
S_3	15	15
S_4	17	17

買い手	評価額	申告額
B_1	30	30
B_2	28	28
B_3	26	26
B_4	24	24

決め方が満たしていて欲しい性質

個人合理性

- 売り手 S_i が価格 p で売る ⇒ $p \geq b(S_i)$
- 買い手 B_j が価格 p で買う ⇒ $p \leq b(B_j)$

上位落札性

最終的に m 個の商品を持つのは
申告額の高かった上位 m 人のプレイヤー

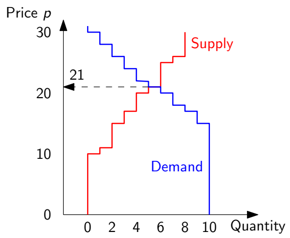
耐戦略性

任意のプレイヤーに対して，
他のプレイヤーがどのような申告額を持っていても，
そのプレイヤーは自分の評価額を申告額とすることが最適反応である

決め方が満たしていて欲しい性質：予算バランス

予算バランス

売り手の受け取る総額 $=$ 買い手の支払う総額



Böhm-Bawerk の馬市場における
コアに基づく取引は
個人合理性，上位落札性，
予算バランスを満たすが，
耐戦略性は満たさない

疑問

これら 4 つの性質をすべて満たす決め方はあるか？

ダブルオークション：不可能性

不可能性

ダブルオークションに対して，個人合理性，上位落札性，耐戦略性，
予算バランスをすべて満たす決め方は存在しない

今から，売り手 1 人 S，買い手 1 人 B の場合に限って証明する

- これら 4 つの性質をすべて満たす決め方があると仮定して，
  そのような決め方を考える
  (最終的に矛盾を導きたい (背理法))

いろいろな場合を考えていく

ダブルオークション：不可能性 証明 (1)

- $b(S) = 2, b(B) = 4 \Rightarrow$ 取引は行われる ($\because$ 上位落札性)
  - S の受取額を $p_{2,4}$ とする
- $b(S) = 3, b(B) = 4 \Rightarrow$ 取引は行われる ($\because$ 上位落札性)
  - S の受取額を $p_{3,4}$ とする

$v(S) = 3, v(B) = 4$ とする

- 耐戦略性より

$b(S) = 3, b(B) = 4$ のときの S の利得	$\geq$	$b(S) = 2, b(B) = 4$ のときの S の利得

$$p_{3,4} - 3 \geq p_{2,4} - 3$$

- $\therefore p_{3,4} \geq p_{2,4}$

ダブルオークション：不可能性 証明 (2)

$v(S) = 2, v(B) = 4$ とする

- 耐戦略性より

$b(S) = 3, b(B) = 4$ のときの S の利得	$\leq$	$b(S) = 2, b(B) = 4$ のときの S の利得

$$p_{3,4} - 2 \leq p_{2,4} - 2$$

- $\therefore p_{3,4} \leq p_{2,4}$

したがって，

- $p_{3,4} = p_{2,4}$

個人合理性より

- $p_{3,4} \geq 3$

したがって，

- $p_{2,4} \geq 3$

ダブルオークション：不可能性 証明 (3)

- $b(S) = 1, b(B) = 2 \Rightarrow$ 取引は行われる ($\because$ 上位落札性)
  - B の支払額を $q_{1,2}$ とする，S の受取額を $p_{1,2}$ とする
- $b(S) = 1, b(B) = 4 \Rightarrow$ 取引は行われる ($\because$ 上位落札性)
  - B の支払額を $q_{1,4}$ とする，S の受取額を $p_{1,4}$ とする

$v(S) = 1, v(B) = 4$ とする

- 耐戦略性より

$b(S) = 1, b(B) = 4$ のときの B の利得	$\geq$	$b(S) = 1, b(B) = 2$ のときの B の利得

$$4 - q_{1,4} \geq 4 - q_{1,2}$$

- $\therefore q_{1,4} \leq q_{1,2}$

ダブルオークション：不可能性 証明 (4)

$v(S) = 1, v(B) = 2$ とする

- 耐戦略性より

$b(S) = 1, b(B) = 4$ のときの B の利得	$\leq$	$b(S) = 1, b(B) = 2$ のときの B の利得

$$2 - q_{1,4} \leq 2 - q_{1,2}$$

- $\therefore q_{1,2} \leq q_{1,4}$

したがって，

- $q_{1,2} = q_{1,4}$

個人合理性より

- $q_{1,2} \leq 2$

予算バランスより

- $p_{1,2} = q_{1,2}$，$p_{1,4} = q_{1,4}$

ダブルオークション：不可能性 証明 (5)

- ここまでのまとめ：得られた不等式

$$p_{1,4} = q_{1,4} = q_{1,2} \leq 2 < 3 \leq p_{2,4}$$

- すなわち，$p_{1,4} < p_{2,4}$

一方，$v(S) = 1, v(B) = 4$ とする

- 耐戦略性より

$b(S) = 1, b(B) = 4$ のときの S の利得	$\geq$	$b(S) = 2, b(B) = 4$ のときの S の利得

$$p_{1,4} - 1 \geq p_{2,4} - 1$$

- $\therefore p_{1,4} \geq p_{2,4}$
- これは $p_{1,4} < p_{2,4}$ に矛盾 □

ダブルオークション：どうするか？

不可能性 (再掲)

ダブルオークションに対して，個人合理性，上位落札性，耐戦略性，
予算バランスをすべて満たす決め方は存在しない

そのため，これら 4 条件の中のどれか (1 つ，あるいは，複数) を
諦める必要がある

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (1)

買い手の申告額を大きい順に並べて $\bar{b}[1], \bar{b}[2], \ldots$ として
売り手の申告額を小さい順に並べて $\underline{b}[1], \underline{b}[2], \ldots$ として
$\underline{b}[k] < \bar{b}[k]$ となる最大の k を k^* とする

売り手	評価額	申告額	受取額
S_1	10	10	
S_2	11	11	
S_3	15	15	
S_4	17	17	
S_5	20	20	
S_6	21	23	
S_7	25	25	
S_8	26	26	

買い手	評価額	申告額	支払額
B_1	30	30	
B_2	28	28	
B_3	26	26	
B_4	24	24	
B_5	22	22	
B_6	21	21	
B_7	20	20	
B_8	18	18	
B_9	17	17	
B_{10}	15	15	

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (2)

勝者：$k^* - 1$ 番目までの買い手と $k^* - 1$ 番目までの売り手

売り手	評価額	申告額	受取額
S_1	10	10	
S_2	11	11	
S_3	15	15	
S_4	17	17	
S_5	20	20	
S_6	21	23	
S_7	25	25	
S_8	26	26	

買い手	評価額	申告額	支払額
B_1	30	30	
B_2	28	28	
B_3	26	26	
B_4	24	24	
B_5	22	22	
B_6	21	21	
B_7	20	20	
B_8	18	18	
B_9	17	17	
B_{10}	15	15	

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (3)

価格：買い手は $\bar{b}[k]$ だけ支払い，売り手は $\underline{b}[k]$ だけ受け取る

売り手	評価額	申告額	受取額
S_1	10	10	20
S_2	11	11	20
S_3	15	15	20
S_4	17	17	20
S_5	20	20	0
S_6	21	23	0
S_7	25	25	0
S_8	26	26	0

買い手	評価額	申告額	支払額
B_1	30	30	22
B_2	28	28	22
B_3	26	26	22
B_4	24	24	22
B_5	22	22	0
B_6	21	21	0
B_7	20	20	0
B_8	18	18	0
B_9	17	17	0
B_{10}	15	15	0

ダブルオークション：耐戦略性と個人合理性を満たす決め方 (4)

余りはオークション主催者の収益となる

売り手	評価額	申告額	受取額
S_1	10	10	20
S_2	11	11	20
S_3	15	15	20
S_4	17	17	20
S_5	20	20	0
S_6	21	23	0
S_7	25	25	0
S_8	26	26	0

買い手	評価額	申告額	支払額
B_1	30	30	22
B_2	28	28	22
B_3	26	26	22
B_4	24	24	22
B_5	22	22	0
B_6	21	21	0
B_7	20	20	0
B_8	18	18	0
B_9	17	17	0
B_{10}	15	15	0

オークション主催者の収益 $= 22 \times 4 - 20 \times 4 = 8$

目次

今日やったこと

目標

オークション理論に触れてみる
- 重要概念：耐戦略性
- 重要概念：第二価格オークション

近年，オークション理論に関する和書が多数出版されている
- 坂井豊貴,『マーケットデザイン入門』，ミネルヴァ書房，2010 年．
- 横尾真,『オークション理論の基礎』，東京電機大学出版局，2006 年．
- ポール・ミルグロム (著)，川又邦雄，奥野正寛 (監訳)，計盛英一郎，馬場弓子 (訳),『オークション 理論とデザイン』，東洋経済新報社，2007 年．

もう 1 つ重要なこと

次のような記事が連載されている
- 横尾 真, 岩崎 敦, 櫻井 祐子, 岡本 吉央,『計算機科学者のためのゲーム理論入門』，コンピュータソフトウェア，2012–2013．

以下を扱っている
- 非協力ゲーム (2 回)
- メカニズムデザイン (オークション含む，2 回)
- 協力ゲーム (1 回)

期末試験

- 日時：2 月 15 日 (金) 14:40〜16:10
- 場所：西 2-101
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 4 題は演習問題として提示されたものと同一である
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可