離散最適化基礎論 第 10 回
特性関数形ゲーム：基礎概念

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2013 年 1 月 11 日

最終更新：2013 年 1 月 11 日　17:04

概要

目標

特性関数形ゲームに関わる概念を理解する

- 提携形成問題と利得配分問題
- 全体合理性，個人合理性，提携合理性
- コア

ゲームの種類

- 非協力ゲーム (non-cooperative game)
  - 戦略形ゲーム (strategic game)
  - 展開形ゲーム (extensive game)
  - ...
- 協力ゲーム (cooperative game)
  - 特性関数形ゲーム (characteristic function game)
  - ...
- ...

目次

協力による利得和の増加 (1)

備忘録：囚人のジレンマ

囚人 1 の利得行列		囚人 2 自白	囚人 2 黙秘
囚人 1	自白	-10	0
	黙秘	-20	-5

囚人 2 の利得行列		囚人 2 自白	囚人 2 黙秘
囚人 1	自白	-10	-20
	黙秘	0	-5

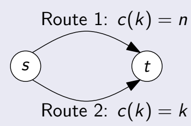
- ナッシュ均衡「両者とも自白」 $\rightsquigarrow$ 利得和 $= (-10) + (-10) = -20$
- 協力できて「両者とも黙秘」 $\rightsquigarrow$ 利得和 $= (-5) + (-5) = -10$

復習：利得和のことを「社会的余剰」(social welfare) と呼ぶ

協力による利得和の増加 (2)

備忘録：経路選択ゲーム

- n 人のプレイヤーが s から t へ移動したい (n は偶数であると仮定)
- 各プレイヤーは Route 1 か Route 2 を選択する
- Route 1 の移動時間は n
- Route 2 の移動時間は，それを k 人選択したとき，k



- あるナッシュ均衡 $\rightsquigarrow$ 利得和 $= -n^2$
- 社会的最適解 $\rightsquigarrow$ 利得和 $= -\frac{3}{4}n^2$

復習：利得和のことを「社会的余剰」(social welfare) と呼ぶ

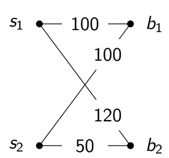
市場経済

2 人の売り手 s_1, s_2：商品を 1 つ持っている

- s_1 は 100 円で入手した
  (p 円で売れれば，$p - 100$ 円の利得)
- s_2 は 150 円で入手した
  (p 円で売れれば，$p - 150$ 円の利得)

2 人の買い手 b_1, b_2：商品を 1 つ欲しい

- b_1 は
  - s_1 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 250 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$250 - p$ 円の利得)
- b_2 は
  - s_1 の商品を 220 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$220 - p$ 円の利得)
  - s_2 の商品を 200 円以下で買いたい
    (p 円で買えば，$200 - p$ 円の利得)



考えたいこと

- 利得和を最大にする取引は？
- そのときの価格は？

タルムードの破産問題

タルムード (Talmud)：ユダヤ教の古典文書

次のような遺産配分が書かれている

- ある人が遺産を残して亡くなったが，A, B, C に借金をしていた
- 借金額：A から 100 万円，B から 200 万円，C から 300 万円

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額	配分法
100	100/3	100/3	100/3	等分
200	50	75	75	???
300	50	100	150	比例配分

単位：万円

疑問

遺産総額 200 万円のときの分配法は一体何？

Aumann と Maschler ('85) が解決 (特性関数形ゲームを用いた)

重み付き多数決ゲーム

ある (架空の) 国会における各政党の議席数

	A 党	B 党	C 党	D 党
議席数	100	70	30	10

総議席数 = 210，過半数 = 106

過半数となる政党の組合せ

{A, B}, {A, C}, {A, D}, {A, B, C}, {A, B, D}, {A, C, D}, {B, C, D}, {A, B, C, D},

B と C と D は「対称」な役割を果たしている
$\rightsquigarrow$ 議席数はかなり違うのに，法案を通す「力」は同じ

疑問

どのような協力関係が生まれる？「力」をどう測る？

目次

特性関数形ゲームの記述：プレイヤー

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合

例において

- 囚人のジレンマ：囚人 1，囚人 2
- 経路選択ゲーム：n 人のプレイヤー
- 市場経済：2 人の売り手と 2 人の買い手 (計 4 人)
- タルムードの破産問題：債権者 A, B, C
- 重み付き多数決ゲーム：A 党，B 党，C 党，D 党

特性関数形ゲームの記述：提携

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合

提携 (coalition) とは？

N の部分集合のこと

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき，提携をすべて書くと

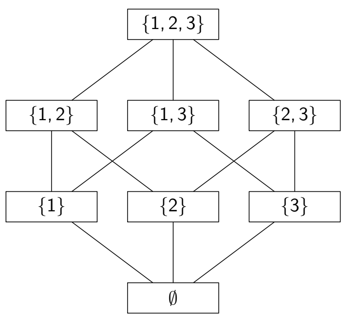
$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

提携をすべて集めた集合は N のべき集合 2^N

- $2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

特性関数形ゲームの記述：提携 (ハッセ図による図示)

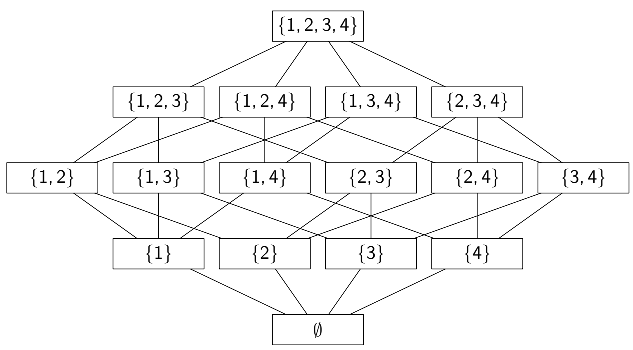
2^N を図示



$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

特性関数形ゲームの記述：提携 (ハッセ図による図示 続)

2^N を図示



$N = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき

特性関数形ゲームの記述：特性関数

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$：プレイヤーの集合

特性関数 (characteristic function) とは？

関数 $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ で，$v(\emptyset) = 0$ を満たすもののこと

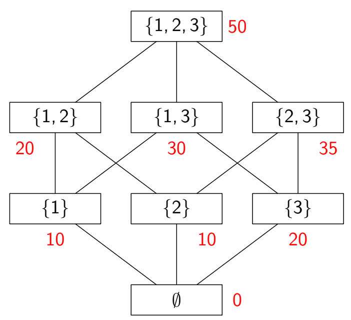
例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

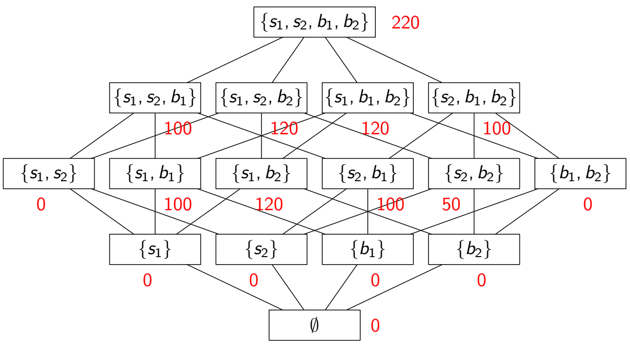
解釈

$v(S)$ は提携 S に属するプレイヤーが協力することで得られる利得和の最大値

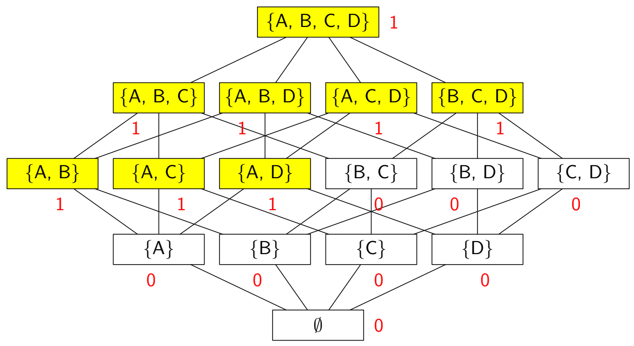
特性関数形ゲームの記述：特性関数 図示



特性関数の例：市場経済



特性関数の例：重み付き多数決ゲーム



特性関数形ゲームで考える問題

プレイヤーの間で協力が可能であるとき，

考える問題 1：提携形成問題

どのような提携が形成されるか？

考える問題 2：利得分配問題

提携の利得和がプレイヤーの間でどう分配されるか？

目次

提携形成問題

特性関数形ゲーム (N, v)

提携形成問題

次の値を最大にするような N の分割 $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ を見つけよ

$$v(S_1) + v(S_2) + \cdots + v(S_k)$$

<u>復習</u>：$\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ が N の分割であるとは

- 任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$S_i \subseteq N$
- 任意の異なる $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$S_i \cap S_j = \emptyset$
- $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k = N$

提携形成問題：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき，次の特性関数を考える

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

可能な分割と利得和

分割	利得和
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$	10+10+20 = 40
$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$	20 + 20 = 40
$\{\{1, 3\}, \{2\}\}$	30 + 10 = 40
$\{\{2, 3\}, \{1\}\}$	35 + 10 = 45
$\{\{1, 2, 3\}\}$	50

よって，最適値は 50 で，最適解は $\{\{1, 2, 3\}\}$

優加法性

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法性とは？

(N, v) が**優加法的ゲーム**であるとは，任意の提携 $S, T \subseteq N$ に対して

$$S \cap T = \emptyset \text{ ならば } v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

を満たすこと

優加法的ゲームの性質

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームの性質

(N, v) が優加法的ゲーム $\Rightarrow$ 任意の提携 $S, T, U \subseteq N$ に対して

$$\begin{matrix} S \cap T = \emptyset \\ S \cap U = \emptyset \\ T \cap U = \emptyset \end{matrix} \text{ ならば } v(S) + v(T) + v(U) \leq v(S \cup T \cup U)$$

<u>証明</u>：

- $S \cap T = \emptyset$ なので，優加法性より，$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$
- $S \cap U = T \cap U = \emptyset$ なので，$(S \cup T) \cap U = \emptyset$
- よって，優加法性より，$v(S \cup T) + v(U) \leq v(S \cup T \cup U)$
- したがって，
  $v(S) + v(T) + v(U) \leq v(S \cup T) + v(U) \leq v(S \cup T \cup U)$ □

優加法的ゲームの性質 (2)

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームの性質 (2)：同じようにして次が証明できる

(N, v) が優加法的ゲーム $\Rightarrow$ N の任意の分割 $\{S_1, \ldots, S_k\}$ に対して

$$v(S_1) + \cdots + v(S_k) \le v(N)$$

証明：演習問題

優加法的ゲームと提携形成問題

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームでは全体提携が形成される

(N, v) が優加法的ゲーム $\Rightarrow$ $\{N\}$ は提携形成問題の最適解

証明：N の分割 $\{S_1, \ldots, S_k\}$ が提携形成問題の最適解であるとする

- 最適性から，$v(S_1) + \cdots + v(S_k) \ge v(N)$
- 一方，優加法性から，$v(S_1) + \cdots + v(S_k) \le v(N)$
- $\therefore$ $v(S_1) + \cdots + v(S_k) = v(N)$
- $\therefore$ $\{N\}$ は提携形成問題の最適解 □

注意

- 以後，考える特性関数形ゲームはすべて優加法的である
- $\therefore$ プレイヤー全体が 1 つの提携を形成すると仮定して進める

目次

利得和の分配

特性関数形ゲーム (N, v)

利得ベクトルとは？

(N, v) の**利得ベクトル**とはベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ のこと

解釈

x_i は，分配後にプレイヤー i が得る利得

利得分配問題で考えること

どのような利得ベクトルであれば，協力する意味を損なわないか

つまり，利得ベクトルが満たすべき性質を議論したい

全体合理性

特性関数形ゲーム (N, v)，利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$

全体合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ に対する次の条件を**全体合理性**と呼ぶ

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

解釈

- 各プレイヤーに分配した利得を足すと，$v(N)$ になる
- $v(N)$ を分割して，利得ベクトル x を作る

個人合理性

特性関数形ゲーム (N, v)，利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$

個人合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ に対する次の条件を**個人合理性**と呼ぶ

任意のプレイヤー $i \in N$ に対して，$x_i \ge v(\{i\})$

解釈

- 各プレイヤーに対して分配した利得は，そのプレイヤーが単独で行動したときの利得以上である
- $x_i < v(\{i\})$ となるプレイヤー i は x に対して不満を持つ

個人合理性：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

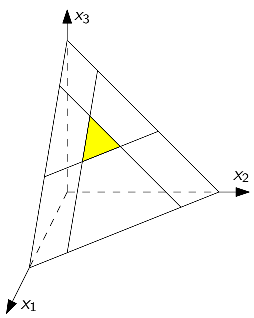
$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \ge 10, x_2 \ge 10, x_3 \ge 20$$

個人合理性：例 図示 (1)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

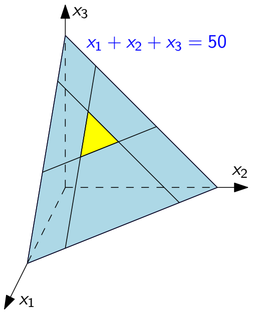
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \ge 10, x_2 \ge 10, x_3 \ge 20$$



個人合理性：例 図示 (2)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

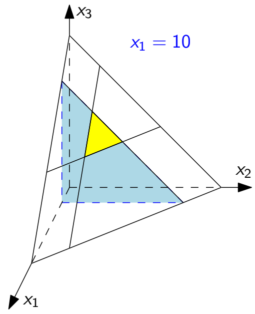
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (3)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

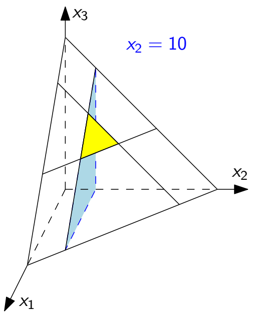
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (4)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

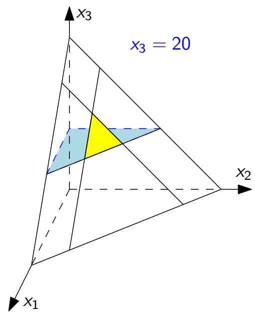
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (5)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

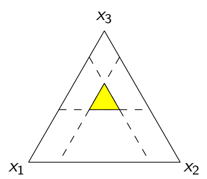
$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



個人合理性：例 図示 (6)

$x \in \mathbb{R}^3$ が全体合理性と個人合理性を満たすとは？

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20$$



2 次元に図示

個人合理性と優加法的ゲーム

特性関数形ゲーム (N, v)

優加法的ゲームの性質 (3)

(N, v) が優加法的 $\Rightarrow$
全体合理性と個人合理性を満たす利得ベクトルが存在

証明：実際にそのような利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ を次のように構成
($N = \{1, \ldots, n\}$ とする)

$$x_i = \begin{cases} v(\{i\}) & (i \in \{1, \ldots, n-1\}) \\ v(N) - \sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}) & (i = n) \end{cases}$$

個人合理性と優加法的ゲーム：証明の続き

- **全体合理性を満たすことの確認**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} v(\{i\}) + v(N) - \sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}) = v(N)$$

- **個人合理性を満たすことの確認**
  - $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ **のとき**

$$x_i = v(\{i\}) \geq v(\{i\})$$

  - $i = n$ **のとき：優加法性から** $v(N) \geq \sum_{j=1}^{n} v(\{j\})$ **となるので**

$$x_n = v(N) - \sum_{j=1}^{n-1} v(\{j\}) \geq v(\{n\})$$

- **よって，x は全体合理性と個人合理性を満たす** □

目次

提携合理性

特性関数形ゲーム (N, v)，利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$

提携合理性とは？

利得ベクトル $x \in \mathbb{R}^N$ に対する次の条件を**提携合理性**と呼ぶ

$$\text{任意の提携 } S \subseteq N \text{ に対して，} \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

解釈

- 各提携に対して分配した利得和は，その提携が単独で行動したときの利得和以上である
- $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$ となる提携 S は x に対して不満を持つ

注：x が提携合理性を満たす $\Rightarrow$ x が個人合理性を満たす

特性関数形ゲームのコア

特性関数形ゲーム (N, v)

コアとは？

(N, v) の**コア**とは，全体合理性，個人合理性，提携合理性を満たす利得ベクトル全体の集合

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ \text{任意の } S \subseteq N \text{ に対して } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \end{array} \right\}$$

- コアは特性関数形ゲームの解の 1 つであると考えられている　（協力ゲームの解概念）
- コアは凸多面体　（有限個の線形不等式で記述されている）
- 優加法的ゲームでもコアは空かもしれない　（演習問題）

コア：例

例：$N = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{1\}) = 10$
- $v(\{2\}) = 10$
- $v(\{3\}) = 20$
- $v(\{1, 2\}) = 20$
- $v(\{1, 3\}) = 30$
- $v(\{2, 3\}) = 35$
- $v(\{1, 2, 3\}) = 50$

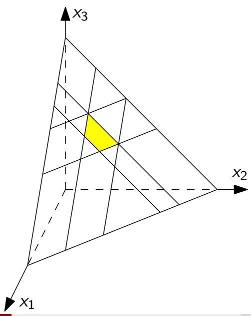
この特性関数形ゲームのコアは？

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$

コア：例 図示 (1)

この特性関数形ゲームのコアは？

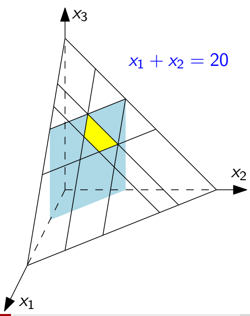
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



コア：例 図示 (2)

この特性関数形ゲームのコアは？

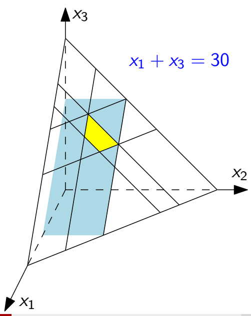
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



コア：例 図示 (3)

この特性関数形ゲームのコアは？

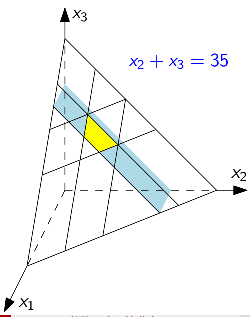
$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



コア：例 図示 (4)

この特性関数形ゲームのコアは？

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 50, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_3 \geq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 20, x_1 + x_3 \geq 30, x_2 + x_3 \geq 35 \end{array} \right\}$$



タルムードの破産問題 (再掲)

タルムード (Talmud)：ユダヤ教の古典文書

次のような遺産配分が書かれている

- ある人が遺産を残して亡くなったが，A, B, C に借金をしていた
- 借金額：A から 100 万円，B から 200 万円，C から 300 万円

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額	配分法
100	100/3	100/3	100/3	等分
200	50	75	75	???
300	50	100	150	比例配分

単位：万円

疑問

遺産総額 200 万円のときの分配法は一体何？

コアを通して，この疑問を考察してみる

タルムードの破産問題：遺産総額 100 万円の場合

分配規則

借金額：A から 100 万円，B から 200 万円，C から 300 万円

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額
100	100/3	100/3	100/3

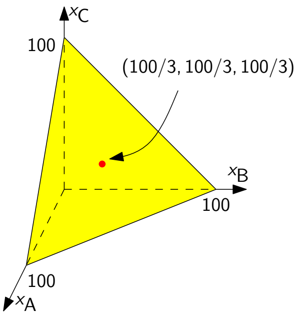
特性関数を次のように作る

$$v(S) = \max\{\text{ 遺産総額 } - S \text{ に属さないプレイヤーからの借金総額}, 0\}$$

特性関数の値

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{A\}) = 0$
- $v(\{B\}) = 0$
- $v(\{C\}) = 0$
- $v(\{A, B\}) = 0$
- $v(\{A, C\}) = 0$
- $v(\{B, C\}) = 0$
- $v(\{A, B, C\}) = 100$

タルムードの破産問題：遺産総額 100 万円の場合 (コアの図示)



コアの中心 (重心) を使って分配を行っている

タルムードの破産問題：遺産総額 300 万円の場合

分配規則

借金額：A から 100 万円，B から 200 万円，C から 300 万円

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額
300	50	100	150

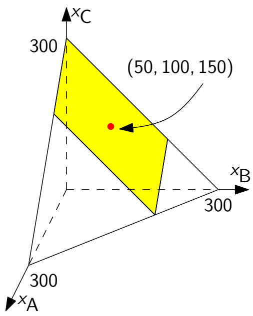
特性関数を次のように作る

$$v(S) = \max\{\text{ 遺産総額 } - S \text{ に属さないプレイヤーからの借金総額}, 0\}$$

特性関数の値

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{A\}) = 0$
- $v(\{B\}) = 0$
- $v(\{C\}) = 0$
- $v(\{A, B\}) = 0$
- $v(\{A, C\}) = 100$
- $v(\{B, C\}) = 200$
- $v(\{A, B, C\}) = 300$

タルムードの破産問題：遺産総額 300 万円の場合 (コアの図示)



コアの中心 (重心) を使って分配を行っている

タルムードの破産問題：遺産総額 200 万円の場合

分配規則

借金額：A から 100 万円，B から 200 万円，C から 300 万円

遺産総額	A への分配額	B への分配額	C への分配額
200	50	75	75

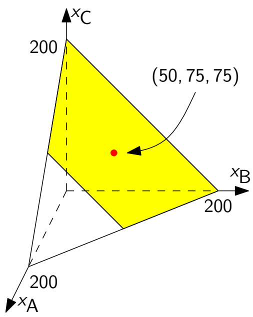
特性関数を次のように作る

$$v(S) = \max\{\text{ 遺産総額 } - S \text{ に属さないプレイヤーからの借金総額}, 0\}$$

特性関数の値

- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{A\}) = 0$
- $v(\{B\}) = 0$
- $v(\{C\}) = 0$
- $v(\{A, B\}) = 0$
- $v(\{A, C\}) = 0$
- $v(\{B, C\}) = 100$
- $v(\{A, B, C\}) = 200$

タルムードの破産問題：遺産総額 200 万円の場合 (コアの図示)



コアの中心 (重心) を使って分配を行っている

タルムードの破産問題の解釈 (Aumann, Maschler '85)

より一般的に

- 特性関数の構成法
  - タルムードの他の箇所に書いてある分配法を基にしている

Equal Division of the Contested Sum

Two hold a garment; ... one claims it all, the other claims half. ... Then the one is awarded 3/4, the other 1/4.

- 分配法の解釈
  - 特性関数形ゲームの理論における仁 (nucleolus) に一致
  - 仁とは ?: 提携の不満を辞書的に最小化した利得ベクトル
  - 性質 1：コアが非空ならば，仁は必ずコアの要素である
  - 性質 2：仁がいつもコアの重心であるとは限らない

目次

今日のまとめ

今日やったこと

特性関数形ゲームに関わる概念を理解する

- 提携形成問題と利得配分問題
- 全体合理性，個人合理性，提携合理性
- コア

次回やりたいこと

市場経済を特性関数形ゲームのコアから眺めること

- 線形計画法が再び登場