離散最適化基礎論 第 9 回
経路選択ゲーム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 12 月 14 日

最終更新：2012 年 12 月 14 日　17:24

概要

目標

経路選択ゲームを通して「無秩序の代償」を理解する
- 社会的最適解と個人的最適解 (ナッシュ均衡)
- 社会的余剰
- 無秩序の代償を改善する方法

日常的な経路選択

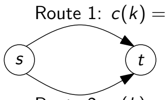
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3b/Seoul_rush_01.jpg

目次

経路選択ゲーム：簡単な例 1 (1)

- 2 人のプレイヤーが s から t へ移動したい
- できる限り移動時間を短くしたい
- 経路は 2 通り (Route 1 と Route 2)
- プレイヤーはどちらかの経路を選択する
- Route 1 の移動時間は 20 分
- Route 2 は，選択したプレイヤーの数で移動時間が変わる
  - 1 人選択したとき，移動時間は 10 分
  - 2 人選択したとき，移動時間は 20 分

Route 1: $c(k) = 20$



Route 2: $c(k) = 10k$

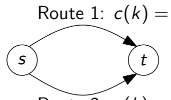
経路選択ゲーム：簡単な例 1 (2)

利得行列で表現：利得 $= -$ 移動時間

P1 の利得行列		P2: Route 1	P2: Route 2
P1	Route 1	-20	-20
	Route 2	-10	-20

P2 の利得行列		P2: Route 1	P2: Route 2
P1	Route 1	-20	-10
	Route 2	-20	-20

Route 1: $c(k) = 20$



Route 2: $c(k) = 10k$

(純粋) ナッシュ均衡が 3 つ存在
- P1 が Route 1 を選択，P2 が Route 2 を選択
- P1 が Route 2 を選択，P2 が Route 1 を選択
- P1 が Route 2 を選択，P2 が Route 2 を選択

経路選択ゲーム：簡単な例 1 (3)

利得行列で表現：利得 $= -$ 移動時間

P1 の利得行列		P2: Route 1	P2: Route 2
P1	Route 1	-20	-20
	Route 2	-10	-20

P2 の利得行列		P2: Route 1	P2: Route 2
P1	Route 1	-20	-10
	Route 2	-20	-20

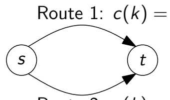
(純粋) ナッシュ均衡が 3 つ存在
- P1 が Route 1 を選択，P2 が Route 2 を選択
  (移動時間総和 (分) $= 20 + 10 = 30$)
- P1 が Route 2 を選択，P2 が Route 1 を選択
  (移動時間総和 (分) $= 10 + 20 = 30$)
- P1 が Route 2 を選択，P2 が Route 2 を選択
  (移動時間総和 (分) $= 20 + 20 = 40$)

選択されるナッシュ均衡により，移動時間総和が変わるかもしれない

経路選択ゲーム：簡単な例 2 (1)

- n 人のプレイヤーが s から t へ移動したい (n は偶数であると仮定)
- できる限り移動時間を短くしたい
- 経路は 2 通り (Route 1 と Route 2)
- プレイヤーはどちらかの経路を選択する
- Route 1 の移動時間は n
- Route 2 は，選択したプレイヤーの数で移動時間が変わり，
  - k 人選択したとき，移動時間は k

Route 1: $c(k) = n$

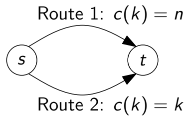


Route 2: $c(k) = k$

経路選択ゲーム：簡単な例 2 (2)

純粋ナッシュ均衡を計算してみる

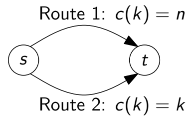
- Route 1 を選択するプレイヤーが ℓ 人，
  Route 2 を選択するプレイヤーが $n-\ell$ 人だとする
  - Route 1 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n$
  - Route 2 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n-\ell$
- Route 1 を選択するプレイヤー 1 人が Route 2 に選択を変更すると，
  変更した後では
  - Route 1 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n$
  - Route 2 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n-\ell+1$
- $\therefore \ell \geq 2 \Leftrightarrow$ Route 1 を選択したプレイヤーは
  Route 2 に選択を変更することで利得を増加させられる



経路選択ゲーム：簡単な例 2 (3)

純粋ナッシュ均衡を計算してみる (続)

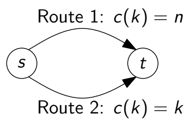
- Route 1 を選択するプレイヤーが ℓ 人，
  Route 2 を選択するプレイヤーが $n-\ell$ 人だとする
  - Route 1 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n$
  - Route 2 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n-\ell$
- Route 2 を選択するプレイヤー 1 人が Route 1 に選択を変更すると，
  変更した後では
  - Route 1 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n \geq n-\ell$
  - Route 2 を選択したプレイヤーの移動時間 $= n-\ell-1$
- $\therefore$ Route 2 を選択したプレイヤーは Route 1 に選択を変更しても
  利得を増加させられない



経路選択ゲーム：簡単な例 2 (4)

したがって，純粋ナッシュ均衡は以下の形をしている

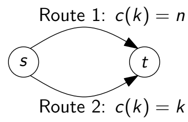
- Route 1 を選択するプレイヤーが 1 人，
  Route 2 を選択するプレイヤーが $n-1$ 人
  - 移動時間総和 $= n \times 1 + (n-1) \times (n-1) = n^2 - n + 1$
- Route 1 を選択するプレイヤーが 0 人，
  Route 2 を選択するプレイヤーが n 人
  - 移動時間総和 $= n \times n = n^2$



経路選択ゲーム：簡単な例 2 (5)

移動時間総和を最小にするような選択は？ (社会的最適解)

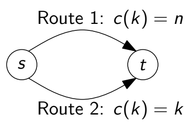
- Route 1 を選択するプレイヤーが ℓ 人，
  Route 2 を選択するプレイヤーが $n-\ell$ 人だとする
  - 移動時間総和 $= n \times \ell + (n-\ell) \times (n-\ell) = n^2 - n\ell + \ell^2$
- 移動時間総和を最小にする $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ を定める
  - $\ell = \frac{n}{2}$ のとき最小になり，最小値は $\dfrac{3}{4}n^2$



経路選択ゲーム：簡単な例 2 (6)

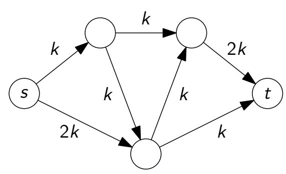
例 2 のまとめ

- ナッシュ均衡では移動時間総和が n^2 になるかもしれない
- 一方，移動時間総和の最小値は $\frac{3}{4}n^2$
- つまり，ナッシュ均衡においては，移動時間総和を見たとき，
  比率として
  $$\frac{n^2}{\frac{3}{4}n^2} = \frac{4}{3}$$
  だけ損をしている $\rightsquigarrow$ 無秩序の代償 (price of anarchy)



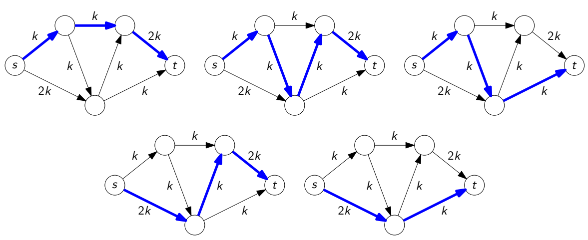
経路選択ゲーム：別の例 3 (1)

- 3 人のプレイヤーが s から t へ移動したい
- できる限り移動時間を短くしたい



経路選択ゲーム：別の例 3 (2)

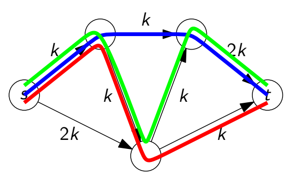
- 経路は 5 通り
- プレイヤーは経路を 1 つ選択する



経路選択ゲーム：別の例 3 (3) 利得の計算

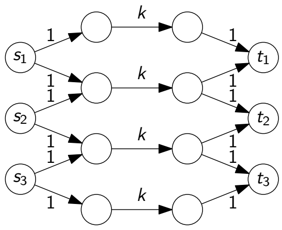
この例では

- $\boxed{\text{プレイヤー赤}}$ の利得 $= -(3+2+1) = -6$
- $\boxed{\text{プレイヤー青}}$ の利得 $= -(3+1+2 \cdot 2) = -8$
- $\boxed{\text{プレイヤー緑}}$ の利得 $= -(3+2+1+2 \cdot 2) = -10$



経路選択ゲーム：別の例 4

- 3 人のプレイヤーがいて
  - プレイヤー 1 は s_1 から t_1 へ移動したい
  - プレイヤー 2 は s_2 から t_2 へ移動したい
  - プレイヤー 3 は s_3 から t_3 へ移動したい
- できる限り移動時間を短くしたい



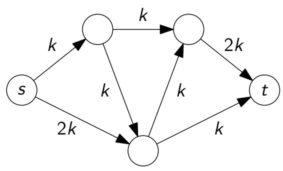
今からやっていくこと

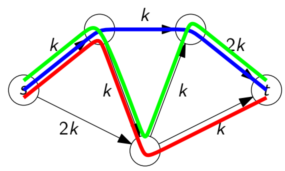
- 経路選択ゲームを定義すること
- 経路選択ゲームにおける「無秩序の代償」の大きさを評価すること
- 経路選択ゲームにおける無秩序の代償を小さくする方法を考えること

目次

経路選択ゲーム (1)

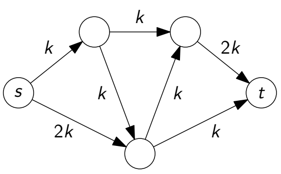
設定
- n 人のプレイヤー
- 有向グラフ $G = (V, E)$
  - V は頂点集合
  - E は弧集合

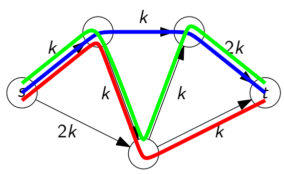




経路選択ゲーム (2)

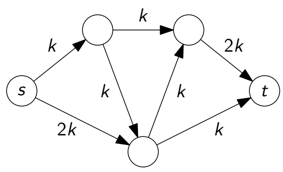
設定
- 各プレイヤー i の出発点 $s_i \in V$ と目標点 $t_i \in V$
  - 「OD ペア」とよく呼ばれる (O = origin, D = destination)
- プレイヤー i が選択できる戦略：s_i から t_i へ至る有向道

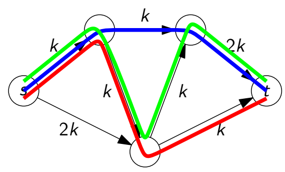




経路選択ゲーム (3)

設定
- 各弧 $e \in E$ に付随する費用関数 $c_e : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (単調非減少非負関数)

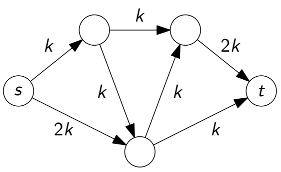


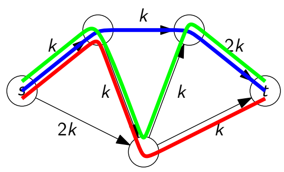


経路選択ゲーム (4)

設定：各プレイヤー i が有向道 P_i を選択したとき
- プレイヤー i の利得は

$$f_i(P_1, \ldots, P_n) = -\sum_{e \in P_i} c_e(e\text{ を使うプレイヤーの数})$$



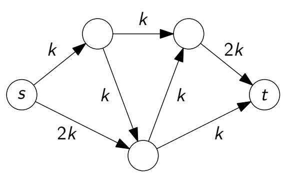


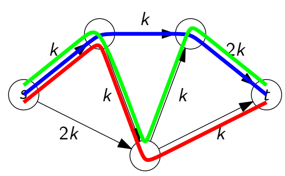
経路選択ゲーム (5)

設定：各プレイヤー i が有向道 P_i を選択したとき
- **社会的余剰** (social welfare) とは

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(P_1, \ldots, P_n)$$

- **社会的最適解**とは社会的余剰を最大にする有向道の選択
- 一方，ナッシュ均衡は「個人的」な最適解
  (「利用者最適解」と呼ぶことがある)



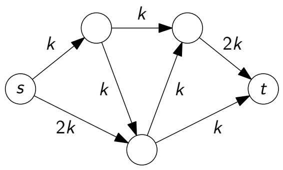


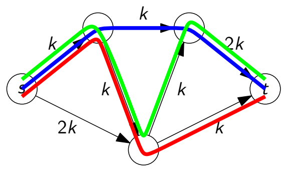
経路選択ゲーム：純粋ナッシュ均衡の存在性

知られている事実

経路選択ゲームには純粋ナッシュ均衡が存在する

- これを証明したのは Rosenthal (1973) で「ポテンシャルゲーム」という概念を使った
- 以降，この事実を証明せずに使っていく





目次

無秩序の代償とは？

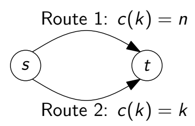
無秩序の代償 (price of anarchy) とは？

次の 2 つの数の比
- 社会的最適解の社会的余剰
- 社会的余剰を最小にするナッシュ均衡の社会的余剰

つまり，個人的最適化によって社会的最適性がどれだけ失われるかを量的に評価したもの

- 注 1：社会的最適解の社会的余剰 $\geq$ 社会的余剰を最小にするナッシュ均衡の社会的余剰
- 注 2：経路選択ゲームでは，社会的余剰を最小にするナッシュ均衡は純粋ナッシュ均衡である

無秩序の代償：簡単な例 2 (1)



純粋ナッシュ均衡は以下の形をしている
- Route 1 を選択するプレイヤーが 1 人，Route 2 を選択するプレイヤーが $n-1$ 人
  - 移動時間総和 $= n \times 1 + (n-1) \times (n-1) = n^2 - n + 1$
- Route 1 を選択するプレイヤーが 0 人，Route 2 を選択するプレイヤーが n 人
  - 移動時間総和 $= n \times n = n^2$

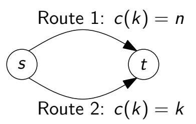
よって，

$$\text{社会的余剰を最小にするナッシュ均衡の社会的余剰} = -n^2$$

無秩序の代償：簡単な例 2 (2)

社会的最適解は？
- Route 1 を選択するプレイヤーが ℓ 人，Route 2 を選択するプレイヤーが $n-\ell$ 人だとする
  - 移動時間総和 $= n \times \ell + (n-\ell) \times (n-\ell) = n^2 - n\ell + \ell^2$
- 移動時間総和を最小にする $\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ を定める
  - $\ell = \frac{n}{2}$ のとき最小になり，最小値は $\frac{3}{4}n^2$
- したがって，

$$\text{無秩序の代償} = \frac{-n^2}{-\frac{3}{4}n^2} = \frac{4}{3}$$



線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償は必ず 2.5 以下

定理 (Suri, Tóth, Zhou '07)

各弧の費用関数が線形 $\Rightarrow$ 無秩序の代償 $\leq \frac{5}{2}$

つまり，個人最適化による損は 2.5 倍に必ず抑えられることが保証される

「各弧の費用関数が線形」とは？

グラフ $G = (V, E)$ における各弧 $e \in E$ に対して

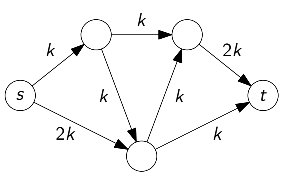
$$c_e(k) = a_e k$$

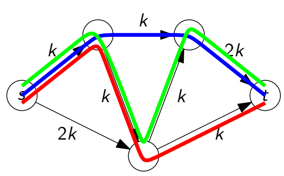
という形をしている (a_e は非負実数)

線形費用経路選択ゲームにおける社会的余剰

各プレイヤー i が経路 P_i を選択するとき
- n_e = 弧 e を使うプレイヤーの数とすると次が成り立つ

$$\begin{aligned}\text{社会的余剰} &= \sum_{i=1}^{n}\left(-\sum_{e \in P_i} c_e(n_e)\right) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{e \in P_i} c_e(n_e) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{e \in P_i} a_e \cdot n_e = -\sum_{e \in E}\sum_{i: e \in P_i} a_e \cdot n_e = -\sum_{e \in E} a_e \cdot n_e^2\end{aligned}$$



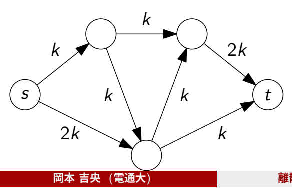


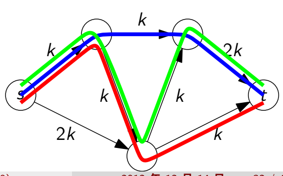
線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：証明のための記法

社会的余剰を最小にするナッシュ均衡において
- P_i = プレイヤー i が選択する経路
- n_e = 弧 e を使うプレイヤーの数
- C = 総移動時間 (= −社会的余剰)

社会的最適解において
- P_i^* = プレイヤー i が選択する経路
- n_e^* = 弧 e を使うプレイヤーの数
- C^* = 総移動時間 (= −社会的余剰)

証明すること：$\frac{C}{C^*} \leq \frac{5}{2}$ (つまり，$C \leq \frac{5}{2}C^*$)





線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：補題

補題

各プレイヤー i に対して

$$\sum_{e \in P_i} a_e n_e \leq \sum_{e \in P_i^*} a_e(n_e+1)$$

略証：

- 左辺 $=$ プレイヤーが $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ を選択するとき，プレイヤー i が費やす移動時間
- 右辺 $\geq$ プレイヤーが $P_1, \ldots, P_i^*, \ldots, P_n$ を選択するとき，プレイヤー i が費やす移動時間
- $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ はナッシュ均衡なので，プレイヤー i が P_i から P_i^* に戦略を変えても，移動時間は減らない
- $\therefore$ 左辺 $\leq$ 右辺 □

線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：計算 (1)

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in P_i} a_e \cdot n_e \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in P_i^*} a_e(n_e+1) && \text{(補題)} \\
&= \sum_{e \in E} \sum_{i : e \in P_i^*} a_e(n_e+1) && \text{(総和の順序交換)} \\
&= \sum_{e \in E} a_e(n_e+1)n_e^* \\
&= \sum_{e \in E} a_e(n_e n_e^* + n_e^*)
\end{aligned}$$

線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：計算 (2)

$$\begin{aligned}
C &\leq \sum_{e \in E} a_e(n_e n_e^* + n_e^*) \\
&= \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{1}{3} n_e^2 + \frac{3}{4} n_e^{*2} - \frac{1}{3}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + n_e^* \right)
\end{aligned}$$

一方

$$C = \sum_{e \in E} a_e \cdot n_e^2$$

事実 (演習問題)

任意の実数 α, β に対して

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{3}{4}\beta^2 - \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{3}{2}\beta\right)^2$$

線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：計算 (3)

よって，

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E} a_e \cdot n_e^2 &\leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{1}{3} n_e^2 + \frac{3}{4} n_e^{*2} - \frac{1}{3}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + n_e^* \right) \\
\therefore \sum_{e \in E} \frac{2}{3} a_e \cdot n_e^2 &\leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{3}{4} n_e^{*2} - \frac{1}{3}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + n_e^* \right) \\
\therefore \sum_{e \in E} a_e \cdot n_e^2 &\leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \right) \\
\therefore C &\leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \right)
\end{aligned}$$

線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：方針確認

ここまでで示したこと

$$C \leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \right)$$

一方，次が成り立つ

$$C^* = \sum_{e \in E} a_e \cdot n_e^{*2}$$

証明したかったことは

$$C \leq \frac{5}{2} \cdot C^*$$

よって，次を示せば定理の証明が終わる

任意の弧 $e \in E$ に対して

$$\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \leq \frac{5}{2} n_e^{*2}$$

線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：計算 (4)

示せばよいこと (再掲)

$$\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2}\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \leq \frac{5}{2} n_e^{*2}$$

書き換え (両辺に $\times 8$)

$$\begin{aligned}
9n_e^{*2} - 4\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2 + 12n_e^* &\leq 20n_e^{*2} \\
\therefore \quad (12 - 11n_e^*)n_e^* &\leq 4\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2
\end{aligned}$$

これを証明すればよい

線形費用経路選択ゲームの無秩序の代償：計算 (5)

示せばよいこと (再掲)

$$(12 - 11n_e^*)n_e^* \leq 4\left(n_e - \frac{3}{2} n_e^*\right)^2$$

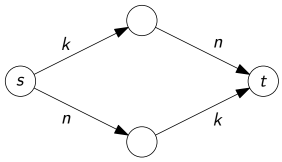
- $n_e^* = 0$ のとき，左辺 $= 0$，右辺 ≥ 0
- $n_e^* \geq 2$ のとき，左辺 < 0，右辺 ≥ 0
- $n_e^* = 1$ のとき，左辺 $= 1$，右辺 ≥ 1

よって，成立 □

目次

新しい経路を作ると無秩序の代償が改善するか？ (1)

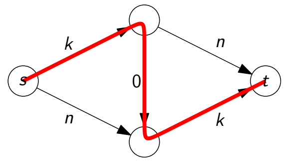
答：そうとは限らないだけではなく，むしろ悪くなるかもしれない



- n 人のプレイヤー (n は偶数と仮定)
- 社会的最適解：$n/2$ 人が上の経路，$n/2$ 人が下の経路
  - 移動時間総和 $= (n + \frac{n}{2})\frac{n}{2} \times 2 = \frac{3}{2}n^2$
- 唯一の純粋ナッシュ均衡：$n/2$ 人が上の経路，$n/2$ 人が下の経路
- $\therefore$ 無秩序の代償 $= 1$

新しい経路を作ると無秩序の代償が改善するか？ (2)

答：そうとは限らないだけではなく，むしろ悪くなるかもしれない



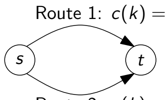
- n 人のプレイヤー (n は偶数と仮定)
- 社会的最適解：$n/2$ 人が上の経路，$n/2$ 人が下の経路
  (移動時間総和 $= \frac{3}{2}n^2$)
- 唯一の純粋ナッシュ均衡：n 人全員が図に示す赤い経路
  (移動時間総和 $= 2n^2$)
- $\therefore$ 無秩序の代償 $= \frac{4}{3} > 1$

Braess のパラドックス ('68)

道路に対する課金で無秩序の代償が改善するか？ (1)

答：費用関数が線形でプレイヤーが多ければ，改善する課金法が必ずある

Route 1: $c(k) = n$



Route 2: $c(k) = k$

n は 4 で割り切れると仮定

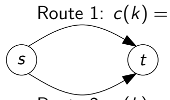
- 社会的最適解：$n/2$ 人が上の経路，$n/2$ 人が下の経路
  (移動時間総和 $= \frac{3}{4}n^2$)
- 悪い純粋ナッシュ均衡：n 人全員が下の経路
  (移動時間総和 $= n^2$)

よって，無秩序の代償 $= \frac{4}{3}$

道路に対する課金で無秩序の代償が改善するか？ (2)

下の経路の費用を $n/2$ だけ増やす (課金)

Route 1: $c(k) = n$



Route 2: $c(k) = k + n/2$

n は 4 で割り切れると仮定

- 悪い純粋ナッシュ均衡：$n/2$ 人が上の経路，$n/2$ が下の経路
  (移動時間総和 $= n^2$)
  - $\therefore$ 元の社会的最適解をナッシュ均衡にするような課金ができた！
- 社会的最適解：$n/4$ 人が上の経路，$3n/4$ 人が下の経路
  (移動時間総和 $= \frac{15}{16}n^2$)

よって，無秩序の代償 $= \frac{16}{15} < \frac{4}{3}$

「Pigou 課税」(Pigovian tax) と呼ばれるものの一種

実際に行われている道路課金の例：ロンドン (イギリス)

2003 年，渋滞緩和の目的でロンドン中心部に対する道路課金が始まった

http://en.wikipedia.org/wiki/File:London_Congestion_Charge,_Old_Street,_England.jpg

目次

今日のまとめ

今日やったこと

経路選択ゲームを通して「無秩序の代償」を理解する

- 社会的最適解と個人的最適解 (ナッシュ均衡)
- 社会的余剰
- 無秩序の代償を改善する方法

ポテンシャルゲームについて日本語で読めるものとしては以下が詳しい

- 宇井貴志，ポテンシャルゲームと離散凹性．第 17 回 RAMP シンポジウム論文集 (2005) pp. 89–105．

経路選択ゲームと無秩序の代償については以下を参照

- T. Roughgarden, Routing Games. Chapter 18, Algorithmic Game Theory, eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. Vazirani, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 461–486.