離散最適化基礎論 第 8 回
展開形ゲーム：離散構造とアルゴリズム (2)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 12 月 7 日

最終更新：2012 年 12 月 7 日　22:24

概要

目標

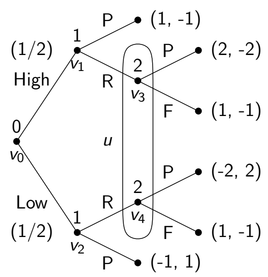
完全記憶展開形 2 人ゼロ和ゲームのナッシュ均衡の計算法の理解

- 完全記憶展開形 2 人ゲームのナッシュ均衡計算法：準備 (復習)
- 完全記憶展開形 2 人ゲームの逐次形表現
- 逐次形表現によるナッシュ均衡計算法

目次

展開形ゲームにおける混合戦略

展開形ゲームにおける混合戦略は，標準化における混合戦略

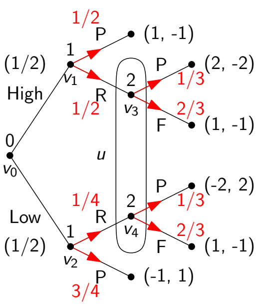


1 の期待利得行列		2 (u) P	F
1 (v_1, v_2)	(P, P)	0	0
	(P, R)	$-1/2$	1
	(R, P)	$1/2$	0
	(R, R)	0	1

2 の期待利得行列		2 (u) P	F
1 (v_1, v_2)	(P, P)	0	0
	(P, R)	$1/2$	-1
	(R, P)	$-1/2$	0
	(R, R)	0	-1

展開形ゲームにおける行動戦略

各情報集合における純粋戦略上の確率分布を集めたもの



- $\Pr[v_1$ で 1 が P を選択$] = 1/2$
- $\Pr[v_1$ で 1 が R を選択$] = 1/2$
- $\Pr[v_2$ で 1 が P を選択$] = 3/4$
- $\Pr[v_2$ で 1 が R を選択$] = 1/4$
- $\Pr[u$ で 2 が P を選択$] = 1/3$
- $\Pr[u$ で 2 が F を選択$] = 2/3$

展開形ゲームにおける均衡

2 つの均衡概念

- 混合ナッシュ均衡：展開形ゲームの標準化に対する混合ナッシュ均衡
- 行動戦略でのナッシュ均衡：行動戦略でナッシュ均衡となるもの

行動戦略でのナッシュ均衡とは？

任意のプレイヤー i の任意の情報集合 u における行動戦略を
変化させても，プレイヤー i の得られる利得が大きくならない ($\forall\ i \in N$)

Kuhn '53 の結果の帰結

完全記憶ゲーム展開形ゲームでは，
混合ナッシュ均衡と行動戦略でのナッシュ均衡が一致
(特に行動戦略でのナッシュ均衡が存在)

つまり，完全記憶ゲームの混合ナッシュ均衡を計算するためには，
行動戦略のみを考えればよい

完全記憶展開形ゲームにおける混合ナッシュ均衡の計算

n 個情報集合があり，各情報集合で選択肢が 2 つあるとき

標準化して，戦略形ゲームと見なすと

戦略数 $\approx 2^n$

それを簡約化して，戦略形ゲームと見なすと

まだ，戦略数が n に関して指数関数的に増加するかもしれない

行動戦略を考えて，行動戦略での均衡を考えようとすると

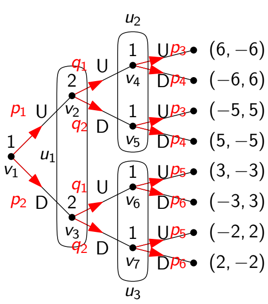
戦略の数 $\approx n$

$\leadsto$ 行動戦略を考えることが計算としては都合がよさそう

注意

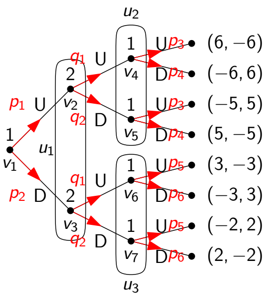
不完全記憶ゲームでは行動戦略でのナッシュ均衡が存在しないかもしれないので，これはできない

例



- $p_1 = \Pr[v_1$ で P1 が U を選択$]$
- $p_2 = \Pr[v_1$ で P1 が D を選択$]$
- $p_3 = \Pr[u_2$ で P1 が U を選択$]$
- $p_4 = \Pr[u_2$ で P1 が D を選択$]$
- $p_5 = \Pr[u_3$ で P1 が U を選択$]$
- $p_6 = \Pr[u_3$ で P1 が D を選択$]$
- $q_1 = \Pr[u_1$ で P2 が U を選択$]$
- $q_2 = \Pr[u_1$ で P2 が D を選択$]$

期待利得の計算



P1 の利得行列		P2 (u_1) U	D
	(v_1, u_2, u_3)		
P1	(U, U, *)	6	−5
	(U, D, *)	−6	5
	(D, *, U)	3	−2
	(D, *, D)	−3	2

- Pr[P1 が (U, U, *) を選択] $= p_1 p_3$
- Pr[P1 が (U, D, *) を選択] $= p_1 p_4$
- Pr[P1 が (D, *, U) を選択] $= p_2 p_5$
- Pr[P1 が (D, *, D) を選択] $= p_2 p_6$

$$\begin{aligned}\text{P1 の期待利得} &= 6p_1p_3q_1 - 6p_1p_4q_1 - 5p_1p_3q_2 + 5p_1p_4q_2 \\ &\quad +3p_2p_5q_1 - 3p_2p_6q_1 - 2p_2p_5q_2 + 2p_2p_6q_2 \\ \text{P2 の期待利得} &= -\text{P1 の期待利得}\end{aligned}$$

プレイヤー 1 の最適反応

プレイヤー 1 が解く最適化問題

q_1, q_2 は定数，$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ は変数

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & 6p_1p_3q_1 - 6p_1p_4q_1 - 5p_1p_3q_2 + 5p_1p_4q_2 \\ & +3p_2p_5q_1 - 3p_2p_6q_1 - 2p_2p_5q_2 + 2p_2p_6q_2 \\ \text{subject to} & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1, \\ & p_3 \geq 0, p_4 \geq 0, p_3 + p_4 = 1, \\ & p_5 \geq 0, p_6 \geq 0, p_5 + p_6 = 1\end{array}$$

目的関数は 2 次関数であり，厄介
- 一般には，より高次の多項式関数になりうる
- 高次の多項式関数は最適化が難しい

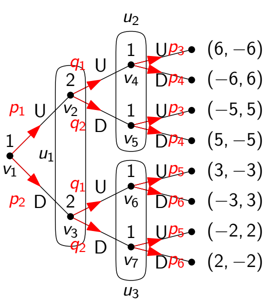
今から行うこと

- 完全記憶ゲームに対する別の表現を考えて，期待利得が (双) 線形関数になるようにする
- ⇝ 逐次形表現
- 完全記憶 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡が線形計画法を用いることで計算できるようになる

目次

逐次形表現 (1)：行動選択の列

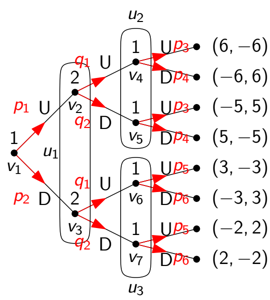
情報集合における行動の選択だけではなく，
その行動を選択するまでのすべての選択を列として表現する



P1 の行動選択の列
- ε (空列) (未選択)
- $\langle$U$\rangle$ (v_1 での選択)
- $\langle$D$\rangle$ (v_1 での選択)
- $\langle$U, U$\rangle$ (u_2 での選択)
- $\langle$U, D$\rangle$ (u_2 での選択)
- $\langle$D, U$\rangle$ (u_3 での選択)
- $\langle$D, D$\rangle$ (u_3 での選択)

P2 の行動選択の列
- ε (未選択)
- $\langle$U$\rangle$ (u_1 での選択)
- $\langle$D$\rangle$ (u_1 での選択)

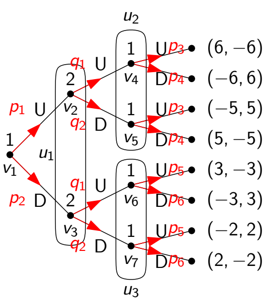
逐次形表現 (2)：行動戦略から逐次形表現における戦略へ



逐次形表現における P1 の確率分布
- $\Pr[\varepsilon] = 1$ (未選択)
- $\Pr[\langle U\rangle] = p_1$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle D\rangle] = p_2$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle U, U\rangle] = p_1p_3$ (u_2 での選択)
- $\Pr[\langle U, D\rangle] = p_1p_4$ (u_2 での選択)
- $\Pr[\langle D, U\rangle] = p_2p_5$ (u_3 での選択)
- $\Pr[\langle D, D\rangle] = p_2p_6$ (u_3 での選択)

逐次形表現における P2 の確率分布
- $\Pr[\varepsilon] = 1$ (未選択)
- $\Pr[\langle U\rangle] = q_1$ (u_1 での選択)
- $\Pr[\langle D\rangle] = q_2$ (u_1 での選択)

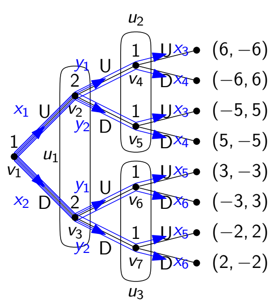
逐次形表現 (3)：逐次形表現における利得行列



P1 の利得行列		P2 ε	$\langle$U$\rangle$	$\langle$D$\rangle$
P1	ε			
	$\langle$U$\rangle$			
	$\langle$D$\rangle$			
	$\langle$U, U$\rangle$		6	−5
	$\langle$U, D$\rangle$		−6	5
	$\langle$D, U$\rangle$		3	−2
	$\langle$D, D$\rangle$		−3	2

空欄は未定義と見なす

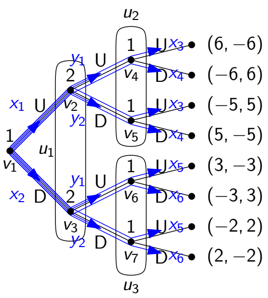
逐次形表現 (4)：逐次形表現における戦略が満たすべき条件



P1 に対して，次のように記号を定義
- $\Pr[\varepsilon] = x_0$ (未選択)
- $\Pr[\langle U\rangle] = x_1$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle D\rangle] = x_2$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle U, U\rangle] = x_3$ (u_2 での選択)
- $\Pr[\langle U, D\rangle] = x_4$ (u_2 での選択)
- $\Pr[\langle D, U\rangle] = x_5$ (u_3 での選択)
- $\Pr[\langle D, D\rangle] = x_6$ (u_3 での選択)

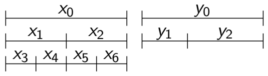
P2 に対して，次のように記号を定義
- $\Pr[\varepsilon] = y_0$ (未選択)
- $\Pr[\langle U\rangle] = y_1$ (u_1 での選択)
- $\Pr[\langle D\rangle] = y_2$ (u_1 での選択)

逐次形表現 (5)：逐次形表現における戦略が満たすべき条件 (2)

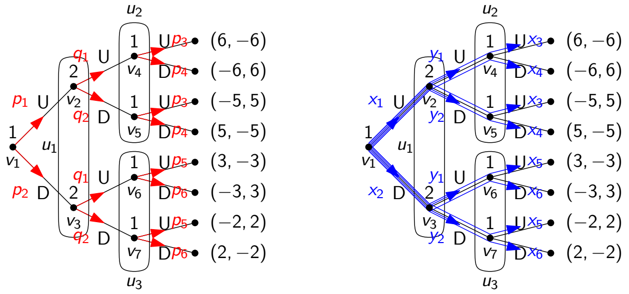


このとき，

- $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
- $x_0 = 1$
- $x_1 + x_2 = x_0$
- $x_3 + x_4 = x_1$
- $x_5 + x_6 = x_2$
- $y_0, y_1, y_2 \geq 0$
- $y_0 = 1$
- $y_1 + y_2 = y_0$



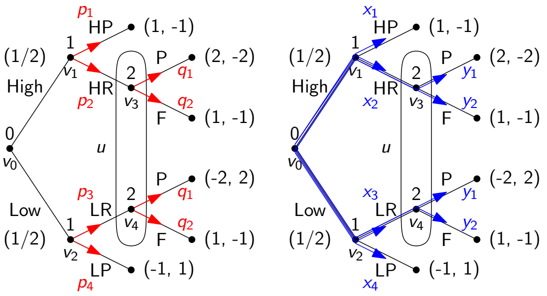
逐次形表現 (6)：逐次形表現における戦略から行動戦略へ



- $p_1 = x_1$
- $p_2 = x_2$
- $p_3 = x_3/x_1$
- $p_4 = x_4/x_1$
- $p_5 = x_5/x_2$
- $p_6 = x_6/x_2$
- $q_1 = y_1$
- $q_2 = y_2$

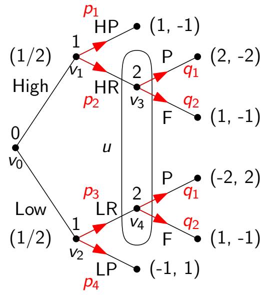
逐次形表現 — 別の例

カードゲームの例



これは偶然手番を含む完全記憶ゲームの例

逐次形表現 (1)：行動選択の列



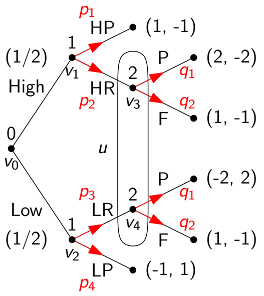
P1 の行動選択の列

- ε (空列) (未選択)
- ⟨HP⟩ (v_1 での選択)
- ⟨HR⟩ (v_1 での選択)
- ⟨LR⟩ (v_2 での選択)
- ⟨LP⟩ (v_2 での選択)

P2 の行動選択の列

- ε (未選択)
- ⟨P⟩ (u での選択)
- ⟨F⟩ (u での選択)

逐次形表現 (2)：行動戦略から逐次形表現における戦略へ



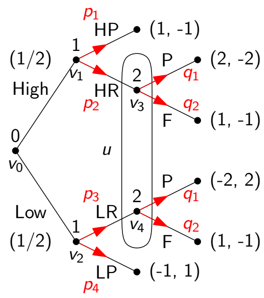
逐次形表現における P1 の確率分布

- $\Pr[\varepsilon] = 1$ (未選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{HP} \rangle] = p_1$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{HR} \rangle] = p_2$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{LR} \rangle] = p_3$ (v_2 での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{LP} \rangle] = p_4$ (v_2 での選択)

逐次形表現における P2 の確率分布

- $\Pr[\varepsilon] = 1$ (未選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{P} \rangle] = q_1$ (u での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{F} \rangle] = q_2$ (u での選択)

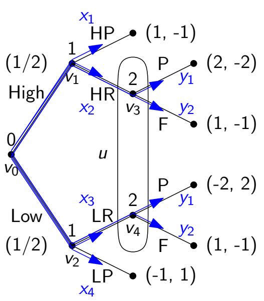
逐次形表現 (3)：逐次形表現における利得行列



P1 の期待利得行列		P2 ε	⟨P⟩	⟨F⟩
	ε			
	⟨HP⟩	1/2		
P1	⟨HR⟩		1	1/2
	⟨LR⟩		−1	1/2
	⟨LP⟩	−1/2		

空欄は未定義と見なす

逐次形表現 (4)：逐次形表現における戦略が満たすべき条件



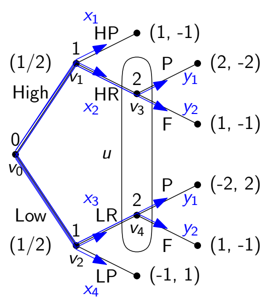
P1 に対して，次のように記号を定義

- $\Pr[\varepsilon] = x_0$ (未選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{HP} \rangle] = x_1$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{HR} \rangle] = x_2$ (v_1 での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{LR} \rangle] = x_3$ (v_2 での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{LP} \rangle] = x_4$ (v_2 での選択)

P2 に対して，次のように記号を定義

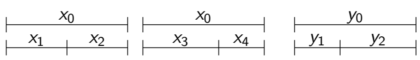
- $\Pr[\varepsilon] = y_0$ (未選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{P} \rangle] = y_1$ (u での選択)
- $\Pr[\langle \mathrm{F} \rangle] = y_2$ (u での選択)

逐次形表現 (5)：逐次形表現における戦略が満たすべき条件 (2)

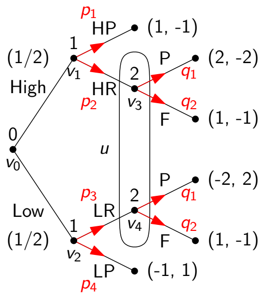


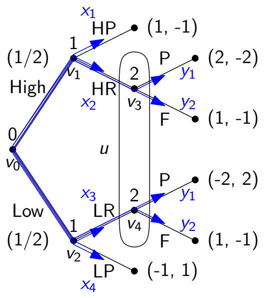
このとき，

- $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $x_0 = 1$
- $x_1 + x_2 = x_0$
- $x_3 + x_4 = x_0$
- $y_0, y_1, y_2 \geq 0$
- $y_0 = 1$
- $y_1 + y_2 = y_0$



逐次形表現 (6)：逐次形表現における戦略から行動戦略へ

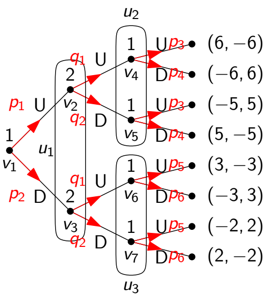


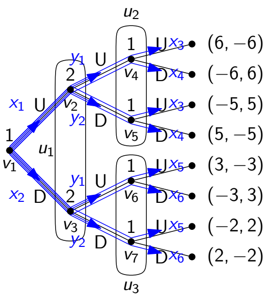


- $p_1 = x_1$
- $p_2 = x_2$
- $p_3 = x_3$
- $p_4 = x_4$
- $q_1 = y_1$
- $q_2 = y_2$

目次

逐次形表現 — はじめの例





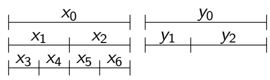
▸ 利得行列を忘れたとき…

プレイヤー 1 が解く最適化問題

プレイヤー 1 が解く最適化問題

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ **は変数，** y_0, y_1, y_2 **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & (6y_1 - 5y_2)x_3 + (-6y_1 + 5y_2)x_4 + (3y_1 - 2y_2)x_5 \\ & +(-3y_1 + 2y_2)x_6 \\ \text{subject to} & x_0 = 1, -x_0 + x_1 + x_2 = 0, -x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ & -x_2 + x_5 + x_6 = 0, \\ & x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$



プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続)

プレイヤー 1 が解く最適化問題 — 再定式化

$u \in \mathbb{R}$ **は変数，** y_0, y_1, y_2 **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & u \\ \text{subject to} & u \geq 6y_1 - 5y_2, u \geq -6y_1 + 5y_2, \\ & u \geq 3y_1 - 2y_2, u \geq -3y_1 + 2y_2 \end{array}$$

戦略形ゲームのナッシュ均衡計算のときを思い出して

$(x_0, \dots, x_6)$ **が** (y_0, y_1, y_2) **に対する最適反応** $\Leftrightarrow$ **ある** $u \in \mathbb{R}$ **が存在して**

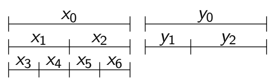
- $x_0 = 1,\ -x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ -x_2 + x_5 + x_6 = 0,$ $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
- $u \geq 6y_1 - 5y_2,\ u \geq -6y_1 + 5y_2,\ u \geq 3y_1 - 2y_2,\ u \geq -3y_1 + 2y_2$
- $x_3(u - 6y_1 + 5y_2) + x_4(u - 6y_1 - 5y_2) + x_5(u - 3y_1 + 2y_2) + x_6(u + 3y_1 - 2y_2) = 0$

プレイヤー 2 が解く最適化問題

プレイヤー 2 が解く最適化問題

y_0, y_1, y_2 **は変数，** $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & (-6x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 3x_6)y_1 \\ & +(5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6)y_2 \\ \text{subject to} & y_0 = 1, -y_0 + y_1 + y_2 = 0, \\ & y_0, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$



プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続)

プレイヤー 2 が解く最適化問題 — 再定式化

$v \in \mathbb{R}$ **は変数，** $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & v \geq -6x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 3x_6, v \geq 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6 \end{array}$$

戦略形ゲームのナッシュ均衡計算のときを思い出して

(y_0, y_1, y_2) **が** $(x_0, \dots, x_6)$ **に対する最適反応** $\Leftrightarrow$ **ある** $v \in \mathbb{R}$ **が存在して**

- $y_0 = 1,\ -y_0 + y_1 + y_2 = 0,\ y_0, y_1, y_2 \geq 0$
- $v \geq -6x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 3x_6,\ v \geq 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6$
- $y_1(v + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 - 3x_6) + y_2(v - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 + 2x_6) = 0$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件

$(x_0, \dots, x_6)$ **と** (y_0, y_1, y_2) **が混合ナッシュ均衡の組を与える** $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ **が存在して**

1. $x_0 = 1,\ -x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ -x_2 + x_5 + x_6 = 0,$ $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
2. $u \geq 6y_1 - 5y_2,\ u \geq -6y_1 + 5y_2,\ u \geq 3y_1 - 2y_2,\ u \geq -3y_1 + 2y_2$
3. $y_0 = 1,\ -y_0 + y_1 + y_2 = 0,\ y_0, y_1, y_2 \geq 0$
4. $v \geq -6x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 3x_6,\ v \geq 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6$
5. $x_3(u - 6y_1 + 5y_2) + x_4(u - 6y_1 - 5y_2) + x_5(u - 3y_1 + 2y_2) + x_6(u + 3y_1 - 2y_2) = 0$
6. $y_1(v + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 - 3x_6) + y_2(v - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 + 2x_6) = 0$

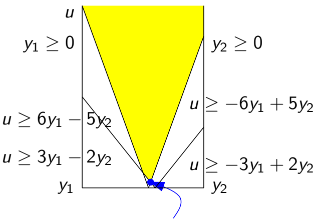
プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

u, y_0, y_1, y_2 は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & u \\
\text{subj. to} & u \geq 6y_1 - 5y_2, \\
& u \geq -6y_1 + 5y_2, \\
& u \geq 3y_1 - 2y_2, \\
& u \geq -3y_1 + 2y_2, \\
& y_0 = 1, \\
& -y_0 + y_1 + y_2 = 0, \\
& y_0, y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

これは図を描いて解ける



$(y_0^*, y_1^*, y_2^*, u^*) = (1, 7/16, 9/16, 3/16)$

プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

$v, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ は変数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & v \\
\text{subject to} & v \geq -6x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 3x_6,\ v \geq 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6, \\
& x_0 = 1, -x_0 + x_1 + x_2 = 0, \\
& -x_1 + x_3 + x_4 = 0, -x_2 + x_5 + x_6 = 0, \\
& x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

これは図を描いて解けないので単体法などで解くと，以下が最適解と分かる

$$(x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, v^*) = (1, 5/16, 11/16, 0, 5/16, 11/16, 0, -3/16)$$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件 (再掲)

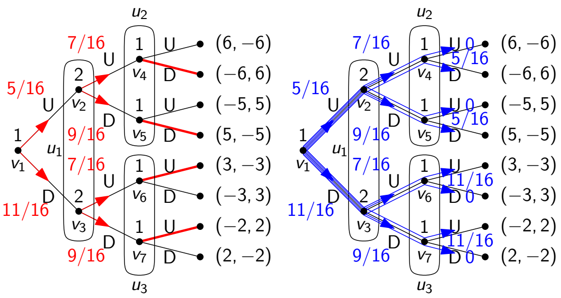
$(x_0, \ldots, x_6)$ と (y_0, y_1, y_2) が混合ナッシュ均衡の組を与える $\Leftrightarrow$

ある $u, v \in \mathbb{R}$ が存在して

1. $x_0 = 1,\ -x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ -x_2 + x_5 + x_6 = 0,$ $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
2. $u \geq 6y_1 - 5y_2,\ u \geq -6y_1 + 5y_2,\ u \geq 3y_1 - 2y_2,\ u \geq -3y_1 + 2y_2$
3. $y_0 = 1,\ -y_0 + y_1 + y_2 = 0,\ y_0, y_1, y_2 \geq 0$
4. $v \geq -6x_3 + 6x_4 - 3x_5 + 3x_6,\ v \geq 5x_3 - 5x_4 + 2x_5 - 2x_6$
5. $x_3(u - 6y_1 + 5y_2) + x_4(u - 6y_1 - 5y_2) + x_5(u - 3y_1 + 2y_2) + x_6(u + 3y_1 - 2y_2) = 0$
6. $y_1(v + 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 - 3x_6) + y_2(v - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 + 2x_6) = 0$

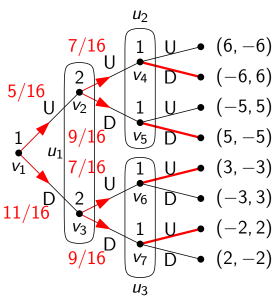
いま得られた $x_0^*, \ldots, x_6^*, y_0^*, \ldots, y_2^*, u^*, v^*$ はこれらの式を満たす

逐次形表現から行動戦略へ



P1 の期待利得は $3/16$，P2 の期待利得は $-3/16$

この行動戦略が予め分かっているとき

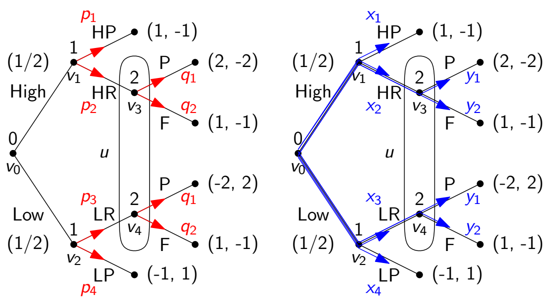


次のようにすれば，この行動戦略の組が混合ナッシュ均衡を与えることは分かる

- 行動戦略から逐次形表現における戦略を作成
- プレイヤーの期待利得を計算
- 作成した戦略が「混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件」を満たすことを確認
  - u は P1 の期待利得，v は P2 の期待利得

逐次形表現 — 別の例

カードゲームの例



これは偶然手番を含む完全記憶ゲームの例

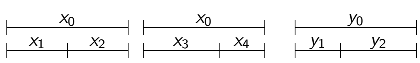
利得行列を忘れたとき…

プレイヤー 1 が解く最適化問題

プレイヤー 1 が解く最適化問題

x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 は変数，y_0, y_1, y_2 は定数

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \frac{1}{2}y_0x_1 + (y_1 + \frac{1}{2}y_2)x_2 + (-y_1 + \frac{1}{2}y_2)x_3 - \frac{1}{2}y_0x_4 \\
\text{subject to} & x_0 = 1, -x_0 + x_1 + x_2 = 0, -x_0 + x_3 + x_4 = 0, \\
& x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$



プレイヤー 1 が解く最適化問題 (続)

プレイヤー 1 が解く最適化問題 — 再定式化

$u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ は変数，y_0, y_1, y_2 は定数

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & u_1 + u_2 \\
\text{subject to} & u_1 \geq \frac{1}{2}y_0,\ u_1 \geq y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\
& u_2 \geq -y_1 + \frac{1}{2}y_2,\ u_2 \geq -\frac{1}{2}y_0
\end{array}
$$

戦略形ゲームのナッシュ均衡計算のときを思い出して

$(x_0, \ldots, x_4)$ が (y_0, y_1, y_2) に対する最適反応 $\Leftrightarrow$ ある $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ が存在して

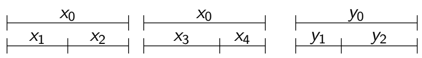
- $x_0 = 1,\ -x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ -x_0 + x_3 + x_4 = 0,\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
- $u_1 \geq \frac{1}{2}y_0,\ u_1 \geq y_1 + \frac{1}{2}y_2,\ u_2 \geq -y_1 + \frac{1}{2}y_2,\ u_2 \geq -\frac{1}{2}y_0$
- $x_1(u_1 - \frac{1}{2}y_0) + x_2(u_1 - y_1 - \frac{1}{2}y_2) + x_3(u_2 + y_1 - \frac{1}{2}y_2) + x_4(u_2 + \frac{1}{2}y_0) = 0$

プレイヤー 2 が解く最適化問題

プレイヤー 2 が解く最適化問題

y_0, y_1, y_2 **は変数，** x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & (-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4)y_0 + (-x_2 + x_3)y_1 + (-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3)y_2 \\ \text{subject to} & y_0 = 1, -y_0 + y_1 + y_2 = 0, \\ & y_0, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$



プレイヤー 2 が解く最適化問題 (続)

プレイヤー 2 が解く最適化問題 — 再定式化

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ **は変数，** x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 **は定数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & v_1 + v_2 \\ \text{subject to} & v_1 \geq -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4, v_2 \geq -x_2 + x_3, v_2 \geq -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

戦略形ゲームのナッシュ均衡計算のときを思い出して

(y_0, y_1, y_2) **が** $(x_0, \dots, x_4)$ **に対する最適反応** $\Leftrightarrow$ **ある** $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ **が存在して**

- $y_0 = 1, -y_0 + y_1 + y_2 = 0, y_0, y_1, y_2 \geq 0$
- $v_1 \geq -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4, v_2 \geq -x_2 + x_3, v_2 \geq -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$
- $y_0(v_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4) + y_1(v_2 + x_2 - x_3) + y_2(v_2 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3) = 0$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件

$(x_0, \dots, x_4)$ **と** (y_0, y_1, y_2) **が混合ナッシュ均衡の組を与える** $\Leftrightarrow$

ある $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ **が存在して**

1. $x_0 = 1, -x_0 + x_1 + x_2 = 0, -x_0 + x_3 + x_4 = 0, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
2. $u_1 \geq \frac{1}{2}y_0, u_1 \geq y_1 + \frac{1}{2}y_2, u_2 \geq -y_1 + \frac{1}{2}y_2, u_2 \geq -\frac{1}{2}y_0$
3. $y_0 = 1, -y_0 + y_1 + y_2 = 0, y_0, y_1, y_2 \geq 0$
4. $v_1 \geq -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4, v_2 \geq -x_2 + x_3, v_2 \geq -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$
5. $x_1(u_1 - \frac{1}{2}y_0) + x_2(u_1 - y_1 - \frac{1}{2}y_2) + x_3(u_2 + y_1 - \frac{1}{2}y_2) + x_4(u_2 + \frac{1}{2}y_0) = 0$
6. $y_0(v_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4) + y_1(v_2 + x_2 - x_3) + y_2(v_2 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3) = 0$

プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

u_1, u_2, y_0, y_1, y_2 **は変数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & u_1 + u_2 \\ \text{subject to} & u_1 \geq \frac{1}{2}y_0, u_1 \geq y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ & u_2 \geq -y_1 + \frac{1}{2}y_2, u_2 \geq -\frac{1}{2}y_0, \\ & y_0 = 1, -y_0 + y_1 + y_2 = 0, \\ & y_0, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

これを解くと，以下が最適解と分かる

$$(y_0^*, y_1^*, y_2^*, u_1^*, u_2^*) = (1, 2/3, 1/3, 5/6, -1/2)$$

最適値は $u_1^* + u_2^* = 1/3$

プレイヤー 1 はプレイヤー 2 の利得を小さくしようとする

次の最適化問題を考える

$v_1, v_2, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ **は変数**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & v_1 + v_2 \\ \text{subject to} & v_1 \geq -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4, v_2 \geq -x_2 + x_3, v_2 \geq -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ & x_0 = 1, -x_0 + x_1 + x_2 = 0, -x_0 + x_3 + x_4 = 0, \\ & x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

これを解くと，以下が最適解と分かる

$$(x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, v_1^*, v_2^*) = (1, 0, 1, 1/3, 2/3, 1/3, -2/3)$$

最適値は $v_1^* + v_2^* = -1/3$

混合ナッシュ均衡であるための必要十分条件 (再掲)

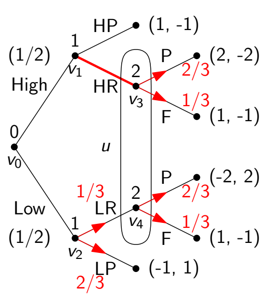
$(x_0, \dots, x_4)$ **と** (y_0, y_1, y_2) **が混合ナッシュ均衡の組を与える** $\Leftrightarrow$

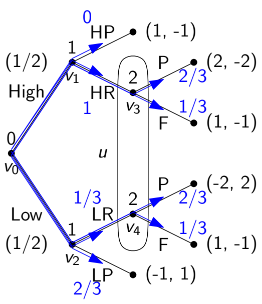
ある $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ **が存在して**

1. $x_0 = 1, -x_0 + x_1 + x_2 = 0, -x_0 + x_3 + x_4 = 0, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
2. $u_1 \geq \frac{1}{2}y_0, u_1 \geq y_1 + \frac{1}{2}y_2, u_2 \geq -y_1 + \frac{1}{2}y_2, u_2 \geq -\frac{1}{2}y_0$
3. $y_0 = 1, -y_0 + y_1 + y_2 = 0, y_0, y_1, y_2 \geq 0$
4. $v_1 \geq -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4, v_2 \geq -x_2 + x_3, v_2 \geq -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$
5. $x_1(u_1 - \frac{1}{2}y_0) + x_2(u_1 - y_1 - \frac{1}{2}y_2) + x_3(u_2 + y_1 - \frac{1}{2}y_2) + x_4(u_2 + \frac{1}{2}y_0) = 0$
6. $y_0(v_1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4) + y_1(v_2 + x_2 - x_3) + y_2(v_2 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3) = 0$

いま得られた $x_0^*, \dots, x_4^*, y_0^*, \dots, y_2^*, u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*$ **はこれらの式を満たす**

逐次形表現から行動戦略へ





P1 **の期待利得は** $1/3$**，**P2 **の期待利得は** $-1/3$

目次

2 人完全記憶展開形ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡 (1)

確認

- 完全記憶展開形ゲームには，
  行動戦略における混合ナッシュ均衡が存在する (Kuhn)
- 完全記憶展開形ゲームの行動戦略は逐次形表現を用いて記述できる
- ∴ 逐次形表現における混合ナッシュ均衡を計算すればよい

プレイヤーが 2 人，ゼロ和の場合の計算法

- 逐次形表現を書き下す
- P1 と P2 が解く最適化問題を書き下す
- 「P2 が P1 の利得を最小化する」ことは線形計画問題として記述されるので，それを解く
- 「P1 が P2 の利得を最小化する」ことは線形計画問題として記述されるので，それを解く

帰結 (von Stengel '96)

2 人完全記憶展開形ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡は
多項式時間で計算できる

2 人完全記憶展開形ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡 (2)

戦略形 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡計算との違い

- 戦略形 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡計算では
  - 必ず「変数の総和が 1」になる
  - 等価な問題を書いたとき，u や v という変数が 1 つだけ現れる
- 完全記憶展開形 2 人ゼロ和ゲームの混合ナッシュ均衡計算では
  - 「変数の総和が 1」になるとは限らない
  - 等価な問題を書いたとき，$u_1, \dots$ や $v_1, \dots$ という変数が複数現れる

等価な問題は線形計画問題の双対性を用いて説明できるが，ここでは省略

目次

今日のまとめ

今日やったこと

完全記憶展開形 2 人ゼロ和ゲームのナッシュ均衡の計算法の理解

- 完全記憶展開形 2 人ゲームのナッシュ均衡計算法：準備 (復習)
- 完全記憶展開形 2 人ゲームの逐次形表現
- 逐次形表現によるナッシュ均衡計算法

2 人ゲームのナッシュ均衡計算法についてより詳しく知りたい場合は以下を参照

- B. von Stengel, Equilibrium computation for two-player games in strategic and extensive form. Chapter 3, Algorithmic Game Theory, eds. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. Vazirani, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 53–78.
- B. von Stengel, Efficient computation of behavior strategies. Games and Economic Behavior **14** (1996) 220–246.