離散最適化基礎論 第 6 回
展開形ゲーム：基礎概念

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 11 月 9 日

最終更新：2012 年 11 月 9 日 11:51

ゲームの種類 (第 1 回講義から)

- **非協力ゲーム** (non-cooperative game)
  - **戦略形ゲーム** (strategic game)
  - **展開形ゲーム** (extensive game)
  - ...
- **協力ゲーム** (cooperative game)
  - **特性関数形ゲーム** (characteristic function game)
  - ...
- ...

概要

目標

展開形ゲームが何であるのか，理解する

- **展開形ゲームの構成要素**
- **混合戦略と行動戦略**
- **完全情報展開形ゲームのナッシュ均衡計算法**

目次

展開形ゲームが対象とする状況

- **プレイヤーが何人かいる**
- **各プレイヤーはルールに従って順番に戦略を選択する**
- **各プレイヤーには何度も戦略を選択する機会が与えられるかもしれない**
- **各プレイヤーは他のプレイヤーの選んだ戦略を知っているかもしれないし，知らないかもしれない**
- **各プレイヤーは自分が既に選んだ戦略を覚えていないかもしれない**

例 1：将棋

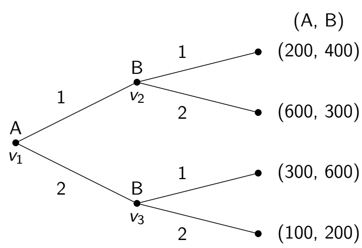
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Shogi_Ban_Koma.jpg

例 2：コンビニ出店

2 つのコンビニチェーン A と B が駅 1 と駅 2 のどちらに出店するか決める

- **A は計画が進んでおり，あとはどちらに出店するか決めるのみ**
- **B は計画が遅れている**
- **B は A の出店を見た後で，どちらに出店するか決められる**
- **B は A の 2 倍の客を獲得できる**
- **駅 1 でのコンビニ利用者数は** 600
- **駅 2 でのコンビニ利用者数は** 300

例 2：コンビニ出店 — ゲーム木による表現

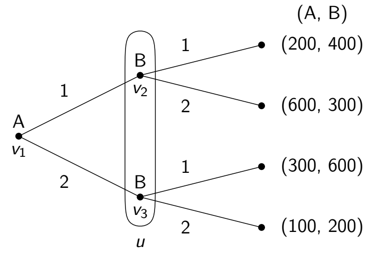


例 3：コンビニ出店 (Part 2)

2 つのコンビニチェーン A と B が駅 1 と駅 2 のどちらに出店するか決める

- A は計画が進んでおり，あとはどちらに出店するか決めるのみ
- B は計画が遅れている
- B は A の出店を見た後で，どちらに出店するか決められない
- B は A の 2 倍の客を獲得できる
- 駅 1 でのコンビニ利用者数は 600
- 駅 2 でのコンビニ利用者数は 300

例 3：コンビニ出店 (Part 2) — ゲーム木による表現

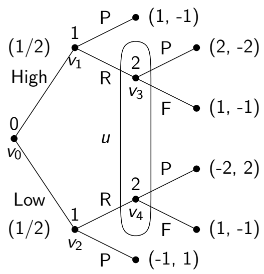


例 4：カードゲーム

2 人のプレイヤーで次のようなカードゲームを行う

- カードは 3 種類：High > Middle > Low (「>」はカードの強さ)
- プレイヤー 1 は確率 1/2 で High を，確率 1/2 で Low のカードを得る
- プレイヤー 2 は Middle のカードを確実に得る
- プレイヤーは自分のカードを得てから，以下の行動を選択する
  - プレイヤー 1 は 1 ドル賭けるか，2 ドル賭けるか申告する
  - プレイヤー 1 が 1 ドル賭けた場合，プレイヤー 2 とすぐに勝負し，負けた方が勝った方に 1 ドル払う
  - プレイヤー 1 が 2 ドル賭けた場合，プレイヤー 2 は 1 ドル払って降りるか，2 ドルで勝負するかを申告する
    勝負の場合は負けた方が勝った方に 2 ドル払う

例 4：カードゲーム

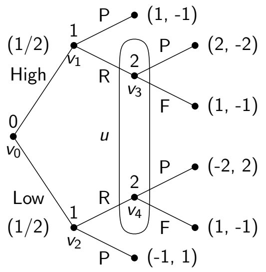


プレイヤー 0 は「自然」(nature) という仮想的プレイヤーで
プレイヤーが操作できない偶然手番 (chance move) を司る

展開形ゲームの記述：プレイヤー

プレイヤーの集合を N で表す

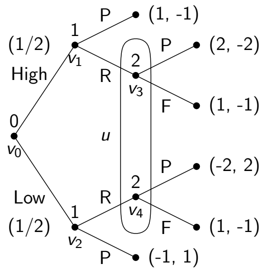
- 通常はプレイヤー 1，プレイヤー 2 とプレイヤーを名づける
- プレイヤー 0 は「自然」



$N = \{1, 2\}$

展開形ゲームの記述：ゲーム木

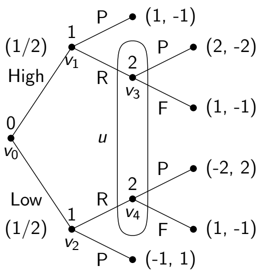
ゲームの進行を根つき木で表現する



木の頂点集合 $V(T)$，内部頂点の集合 $= \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

展開形ゲームの記述：戦略

根つき木の各内部ノードにプレイヤーの選択できる (純粋) 戦略が与えられている

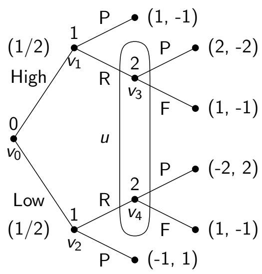


- $A(v_0) = \{\mathrm{High}, \mathrm{Low}\}$
- $A(v_1) = \{\mathrm{P}, \mathrm{R}\}$
- $A(v_2) = \{\mathrm{P}, \mathrm{R}\}$
- $A(v_3) = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}$
- $A(v_4) = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}$

(純粋) 戦略の選択 1 つ 1 つが部分木に対応する

展開形ゲームの記述：プレイヤー分割

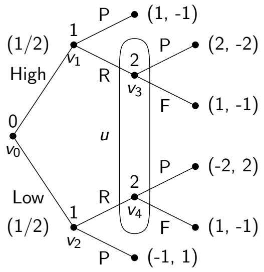
根つき木の各内部頂点にプレイヤーが 1 人割り当てられる



- $P_0 = \{v_0\}$
- $P_1 = \{v_1, v_2\}$
- $P_2 = \{v_3, v_4\}$

展開形ゲームの記述：偶然手番の確率分布

自然が割り当てられた内部頂点において各戦略が選ばれる確率

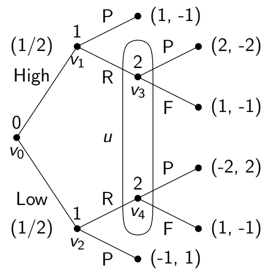


- Pr[自然が High を選択] $= 1/2$
- Pr[自然が Low を選択] $= 1/2$

展開形ゲームの記述：情報分割

プレイヤー i の情報集合

プレイヤー i が割り当てられた内部頂点で，
プレイヤー i が区別できないもの同士を集めたもの

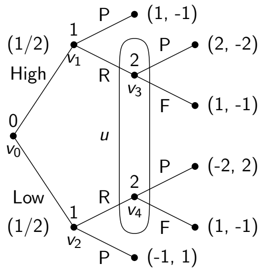


- $U_0 = \{\{v_0\}\}$
- $U_1 = \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$
- $U_2 = \{\{v_3, v_4\}\}$

プレイヤー i の**情報分割**とは，プレイヤー i の情報集合を全部集めたもの

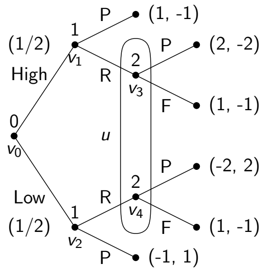
展開形ゲームの記述：利得関数

根つき木の葉にたどり着いたときに，各プレイヤーが受け取る利得



展開形ゲームのルール

1. 根つき木の根からゲームを開始する
2. 今いる頂点が葉 ⇒ そこの利得を各プレイヤーが受け取る
3. 今いる頂点が内部頂点 ⇒
   1. その頂点に割り当てられているプレイヤーが戦略を選択する
   2. 選択に従って部分木へ移動する
   3. その部分木において再帰的にゲームをプレイする



展開形ゲームの種類：情報完備ゲーム

情報完備ゲーム (game with complete information) とは？

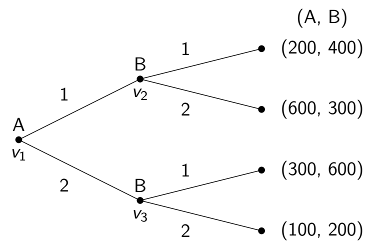
すべてのプレイヤーがプレイヤー集合，ゲーム木，戦略，プレイヤー分割，偶然手番の確率分布，情報分割，利得関数，ゲームのルールをすべて知っている展開形ゲーム

そうでないゲームは情報不完備ゲームと呼ばれる

展開形ゲームの種類：完全情報ゲーム

完全情報ゲーム (game with perfect information) とは？

すべての情報集合の要素数が 1 であるような展開形ゲーム

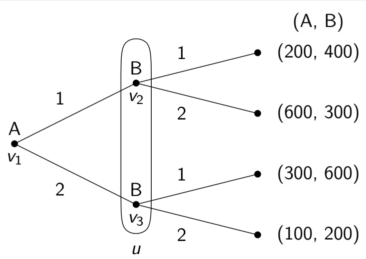


- 将棋は完全情報ゲーム
- 偶然手番があってもよい

展開形ゲームの種類：完全記憶ゲーム

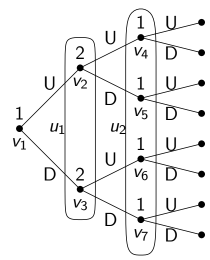
完全記憶ゲーム (game with perfect recall) とは？

各プレイヤーが，自分のいままで選択した戦略をすべて覚えているような展開形ゲーム



- 完全情報ゲームは完全記憶ゲーム

完全記憶ゲームではない例



展開形ゲーム：形式的定義 — ゲーム木

- **ゲーム木** (game tree) は根つき木 T
  - **根つき木** (rooted tree) とは，根 (root) と呼ばれる特別な頂点を持つ
  - 展開形ゲームでは根を初期頂点と呼ぶこともある
- T の頂点集合を $V(T)$ と書く
- 各頂点 $v \in V(T)$ から出る辺の集合を $E(v)$ と書く
- $E(v) = \emptyset$ となる頂点 $v \in V(T)$ を T の**葉** (leaf) と呼ぶ
- T の葉をすべて集めた集合を $L(T)$ と書く
- $L(T)$ の要素ではない T の頂点は T の**内部頂点**と呼ばれる

展開形ゲーム：形式的定義 — プレイヤー分割

プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$

- **プレイヤー分割** (player partition) とは $V(T) - L(T)$ の分割 $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$
  - $V(T) - L(T) = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$
  - $\forall\, i \neq j$: $P_i \cap P_j = \emptyset$
- P_i はプレイヤー i の手番をすべて集めた集合
- P_0 は偶然手番をすべて集めた集合

展開形ゲーム：形式的定義 — 情報分割

プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$，プレイヤー分割 $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$

- プレイヤー i の**情報分割** (information partition) とは P_i の分割 U_i
  - $P_i = \bigcup_{u \in U_i} u$
  - $\forall\, u \neq u' \in U_i$: $u \cap u' = \emptyset$
- ただし，$\forall\, u \in U_i, \forall\, v, v' \in u$: $|E(v)| = |E(v')|$
- 各 $u \in U_i$ をプレイヤー i の**情報集合** (information set) と呼ぶ
- 普通は，T の根から葉へ至る任意のパスと各情報集合は高々1 回しか交わらないと仮定
- P_0 に対するプレイヤー分割 U_0 において，「$\forall\, u \in U_0$: u_0 の要素数は 1」であるとする

展開形ゲーム：形式的定義 — 戦略

プレイヤー i の情報集合 $u \in U_i$ における戦略の集合を $A(u)$ と書く

- 各戦略 $a \in A(u)$ と各頂点 $v \in u$ に対して
  ちょうど 1 つの辺 $e_a \in E(v)$ が対応する
- u においてプレイヤー i が戦略 a を選んだとき，
  ゲーム木において実際は $v \in u$ にいるならば，
  ゲームは v から e_a をたどって到達する部分木に移行する

展開形ゲーム：形式的定義 — 偶然手番における確率分布

偶然手番 $v \in P_0$，戦略集合 $A(\{v\})$

- 偶然手番 v における確率分布 $p_v \colon A(\{v\}) \to \mathbb{R}$
  - $\forall\, a \in A(\{v\})$: $p_v(a) \geq 0$
  - $\displaystyle\sum_{a \in A(\{v\})} p_v(a) = 1$

展開形ゲーム：形式的定義 — 利得関数

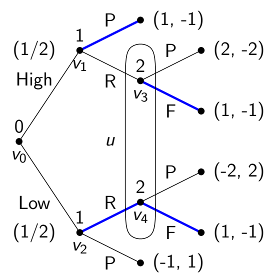
利得関数 $f \colon L(T) \to \mathbb{R}^N$

- 任意の $v \in L(T)$ と $i \in N$ に対して
  $f(v)_i$ はゲームが v にたどりついたときプレイヤー i が受け取る利得

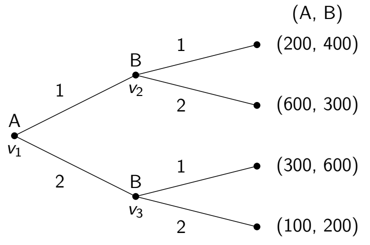
目次

展開形ゲームにおける戦略は，各情報集合における選択の集まり

展開形ゲームにおける戦略は，各情報集合における選択の集まり



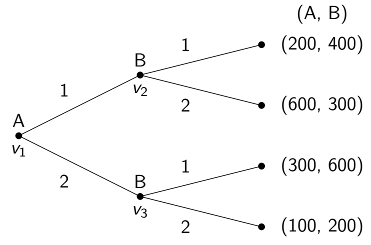
展開形ゲームを戦略形ゲームとして表現する — コンビニ出店 (1)



A の 利得行列		B (v_2, v_3) (1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
A	1	200	200	600	600
(v_1)	2	300	100	300	100

これを展開形ゲームの標準化と呼ぶことがある

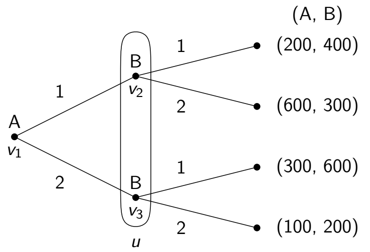
展開形ゲームを戦略形ゲームとして表現する — コンビニ出店 (2)



B の 利得行列		B (v_2, v_3) (1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)
A	1	400	400	300	300
(v_1)	2	600	200	600	200

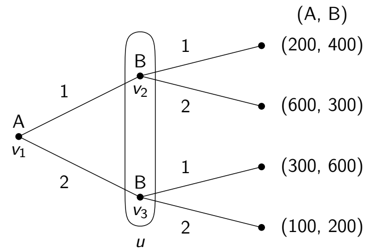
これを展開形ゲームの標準化と呼ぶことがある

展開形ゲームを戦略形ゲームとして表現する — コンビニ出店 Part 2 (1)



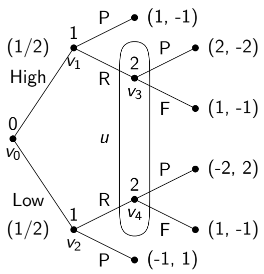
A の 利得行列		B (u) 1	2
A	1	200	600
(v_1)	2	300	100

展開形ゲームを戦略形ゲームとして表現する — コンビニ出店 Part 2 (2)



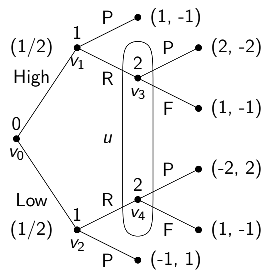
B の 利得行列		B (u) 1	2
A	1	400	300
(v_1)	2	600	200

展開形ゲームを戦略形ゲームとして表現する — カードゲーム (1)



1 の 期待利得行列		2 (u) P	F
	(P, P)	0	0
1	(P, R)	$-1/2$	1
(v_1, v_2)	(R, P)	$1/2$	0
	(R, R)	0	1

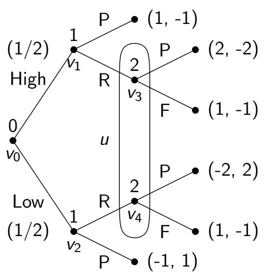
展開形ゲームを戦略形ゲームとして表現する — カードゲーム (2)



2 の 期待利得行列		2 (u) P	F
	(P, P)	0	0
1	(P, R)	$1/2$	-1
(v_1, v_2)	(R, P)	$-1/2$	0
	(R, R)	0	-1

展開形ゲームにおける混合戦略

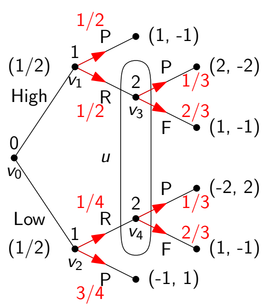
展開形ゲームにおける混合戦略は，この表現における混合戦略



1 の 期待利得行列		2 (u) P	F
	(P, P)	0	0
1	(P, R)	$-1/2$	1
(v_1, v_2)	(R, P)	$1/2$	0
	(R, R)	0	1

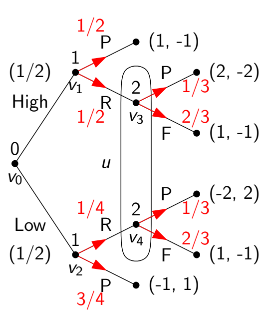
展開形ゲームにおける行動戦略

各情報集合における純粋戦略上の確率分布を集めたもの



- $\Pr[v_1$ で 1 が P を選択$] = 1/2$
- $\Pr[v_1$ で 1 が R を選択$] = 1/2$
- $\Pr[v_2$ で 1 が P を選択$] = 3/4$
- $\Pr[v_2$ で 1 が R を選択$] = 1/4$
- $\Pr[u$ で 2 が P を選択$] = 1/3$
- $\Pr[u$ で 2 が F を選択$] = 2/3$

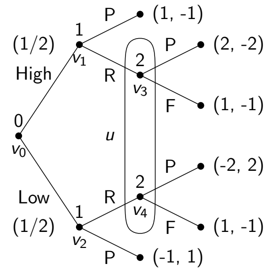
行動戦略から混合戦略を作る



- Pr[1 が (P,P) を選択] $= \Pr[v_1$ で 1 が P$] \cdot \Pr[v_2$ で 1 が P$] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$
- Pr[1 が (P,R) を選択] $= \Pr[v_1$ で 1 が P$] \cdot \Pr[v_2$ で 1 が R$] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
- Pr[1 が (R,P) を選択] $= \Pr[v_1$ で 1 が R$] \cdot \Pr[v_2$ で 1 が P$] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$
- Pr[1 が (R,R) を選択] $= \Pr[v_1$ で 1 が R$] \cdot \Pr[v_2$ で 1 が R$] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

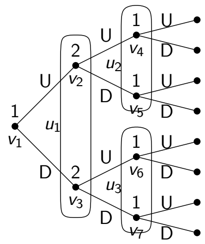
確認：$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

混合戦略から行動戦略を作る



- $\Pr[v_1$ で 1 が P$] =$ Pr[1 が (P,P)] + Pr[1 が (P,R)]
- $\Pr[v_1$ で 1 が R$] =$ Pr[1 が (R,P)] + Pr[1 が (R,R)]
- $\Pr[v_2$ で 1 が P$] =$ Pr[1 が (P,P)] + Pr[1 が (R,P)]
- $\Pr[v_2$ で 1 が R$] =$ Pr[1 が (P,R)] + Pr[1 が (R,R)]

別の例

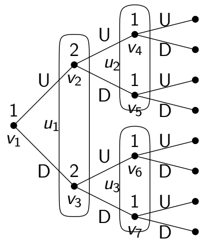


戦略形ゲームに変換したとき

- プレイヤー 1 の戦略：(v_1, u_2, u_3) として 8 つ
  - (U, U, U), (U, U, D), (U, D, U), (U, D, D), (D, U, U), (D, U, D), (D, D, U), (D, D, D)
- プレイヤー 2 の戦略：u_1 において 2 つ
  - U, D

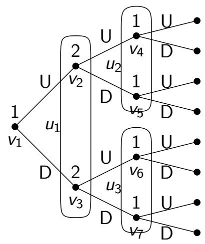
別の例：混合戦略から行動戦略へ

混合戦略：$p_{XYZ} = \Pr[1$ が v_1 で X，u_2 で Y，u_3 で Z を選択$]$ とする



- $\Pr[v_1$ で 1 が U$] = p_{UUU} + p_{UUD} + p_{UDU} + p_{UDD}$
- $\Pr[v_1$ で 1 が D$] = p_{DUU} + p_{DUD} + p_{DDU} + p_{DDD}$
- $\Pr[u_2$ で 1 が U$] = \dfrac{p_{UUU} + p_{UUD}}{p_{UUU} + p_{UUD} + p_{UDU} + p_{UDD}}$
- $\Pr[u_2$ で 1 が D$] = \dfrac{p_{UDU} + p_{UDD}}{p_{UUU} + p_{UUD} + p_{UDU} + p_{UDD}}$
- $\Pr[u_3$ で 1 が U$] = \dfrac{p_{DUU} + p_{DDU}}{p_{DUU} + p_{DUD} + p_{DDU} + p_{DDD}}$
- $\Pr[u_3$ で 1 が D$] = \dfrac{p_{DUD} + p_{DDD}}{p_{DUU} + p_{DUD} + p_{DDU} + p_{DDD}}$

別の例：行動戦略から混合戦略へ



- $p_{UUU} = \Pr[v_1$ で 1 が U$] \cdot \Pr[u_2$ で 1 が U$] \cdot \Pr[u_3$ で 1 が U$]$
- $p_{UUD} = \Pr[v_1$ で 1 が U$] \cdot \Pr[u_2$ で 1 が U$] \cdot \Pr[u_3$ で 1 が D$]$
- ...
- $p_{DDD} = \Pr[v_1$ で 1 が D$] \cdot \Pr[u_2$ で 1 が D$] \cdot \Pr[u_3$ で 1 が D$]$

混合戦略と行動戦略

完全記憶展開形ゲームにおいては

- 任意の混合戦略に対して，ある行動戦略が存在して それらの与える期待利得は等しい
- 任意の行動戦略に対して，ある混合戦略が存在して それらの与える期待利得は等しい

(Kuhn '53)

展開形ゲームにおける均衡

2 つの均衡概念

- 混合ナッシュ均衡：展開形ゲームの標準化に対する混合ナッシュ均衡
- 行動戦略でのナッシュ均衡：行動戦略でナッシュ均衡となるもの

行動戦略でのナッシュ均衡とは？

任意のプレイヤー i の任意の情報集合 u における行動戦略を 変化させても，プレイヤー i の得られる利得が大きくならない ($\forall\, i \in N$)

前のスライドの Kuhn '53 の結果の帰結

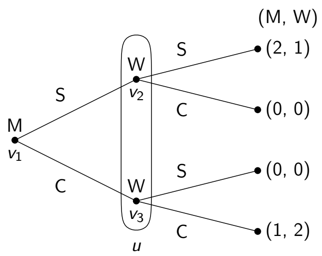
完全記憶ゲーム展開形ゲームでは，
混合ナッシュ均衡と行動戦略でのナッシュ均衡が一致
(特に行動戦略でのナッシュ均衡が存在)

完全記憶ゲームでない場合は，成り立たないかもしれない

補足：戦略形ゲームから展開形ゲーム

男性の利得行列		女性 S	女性 C
男性	S	2	0
	C	0	1

女性の利得行列		女性 S	女性 C
男性	S	1	0
	C	0	2



目次

完全情報展開形ゲームのナッシュ均衡

目標

完全情報展開形ゲームのナッシュ均衡を計算する

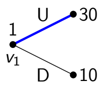
手法

後ろ向き帰納法 (backward induction)

特徴
- 「ボトムアップ」な手法
- 純粋ナッシュ均衡を発見
- 計算量がゲーム木の大きさに対する線形時間

例 1

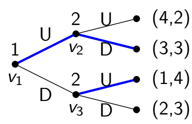
ナッシュ均衡は？ (プレイヤーの数 $= 1$)



v_1 で 1 は U を選び，受け取る利得は 30

例 2

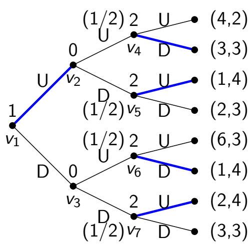
ナッシュ均衡は？ (プレイヤーの数 $= 2$)



v_1 で 1 は U を選び，v_2 で 2 は D を選び，v_3 で 2 は U を選ぶ
受け取る利得は，プレイヤー 1 が 3，プレイヤー 2 が 3

例 3

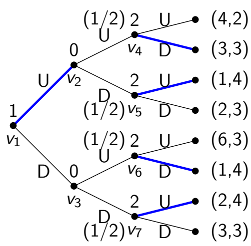
ナッシュ均衡は？ (プレイヤーの数 $= 2$)，偶然手番あり



v_1 で 1 は U を選び，v_4 で 2 は D を選び，v_5 で 2 は U を選び，
v_6 で 2 は D を選び，v_7 で 2 は U を選ぶ
受け取る期待利得は，プレイヤー 1 が 2，プレイヤー 2 が 7/2

後ろ向き帰納法 (backward induction)

1. 葉に近い部分ゲームから順に (純粋) 最適反応を計算
2. 部分ゲームをその最適反応が与える利得に置き換え
3. 順に根に近い部分ゲームの (純粋) 最適反応を計算
4. 最終的にすべての内部頂点における戦略の選択が決定



目次

今日のまとめ

今日やったこと

展開形ゲームが何であるのか，理解する
- 展開形ゲームの構成要素
- 混合戦略と行動戦略
- 完全情報展開形ゲームのナッシュ均衡計算法

次回と次々回
- 展開形ゲームにおける情報構造がナッシュ均衡に与える影響を見る
- 2 人完全記憶展開形ゲームにおけるナッシュ均衡の計算法を考える