

離散最適化基礎論 第2回
戦略形ゲーム：基礎概念岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012年10月12日

最終更新：2012年10月12日 16:51

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

1 / 46

戦略形ゲーム

小さなゲームの例：囚人のジレンマ

2人の囚人がいる

囚人の「うれしさ」

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	-10	0
自分が黙秘	-20	-5

- ▶ 相手の出方が分かっているとき
 - ▶ 相手が自白する ⇒ 自分は自白した方が得
 - ▶ 相手が黙秘する ⇒ 自分は自白した方が得
- ▶ ∴ 相手の出方が分からなくても、自分は自白する方が得

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

2 / 46

戦略形ゲーム

戦略形ゲームの記述：戦略

各プレイヤー $i \in N$ に対して、戦略の集合 A_i

囚人のジレンマの場合

- ▶ $A_1 = \{\text{自白}, \text{黙秘}\}$
- ▶ $A_2 = \{\text{自白}, \text{黙秘}\}$

備忘録：囚人のジレンマ

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	-10	0
自分が黙秘	-20	-5

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

3 / 46

戦略形ゲーム

戦略形ゲームのルール

- ▶ 各プレイヤー $i \in N$ は1つ戦略 $a_i \in A_i$ を同時に選ぶ
そのとき、他のプレイヤーが何を選んだのかは知らない
- ▶ 各プレイヤー i は利得 $f_i(a_1, \dots, a_n)$ を得る

備忘録：囚人のジレンマ

囚人1の 利得行列	囚人2 自白	囚人2 黙秘	囚人2の 利得行列	囚人2 自白	囚人2 黙秘
囚人1	自白	-10	0	囚人1	自白
	黙秘	-20	-5		黙秘

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

4 / 46

概要

目標

戦略形ゲームの基礎概念を理解する

- ▶ 戦略形ゲーム：非協力ゲームの1表現，同時手番
- ▶ 重要概念：最適反応戦略，混合戦略，ナッシュ均衡
- ▶ ナッシュ均衡の計算：2人ゲーム，戦略数がそれぞれ2の場合

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

2 / 46

戦略形ゲーム

戦略形ゲームの記述：プレイヤー

 N ：プレイヤーの集合

囚人のジレンマの場合

- ▶ $N = \{\text{囚人1}, \text{囚人2}\}$

備忘録：囚人のジレンマ

	相手が自白	相手が黙秘
自分が自白	-10	0
自分が黙秘	-20	-5

以後，簡単のため $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とする (n は自然数)

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

4 / 46

戦略形ゲーム

戦略形ゲームの記述：利得

各プレイヤー $i \in N$ に対して，利得関数 $f_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$

囚人のジレンマの場合

- ▶ $f_1(\text{自白}, \text{自白}) = -10$
- ▶ $f_1(\text{自白}, \text{黙秘}) = 0$
- ▶ $f_1(\text{黙秘}, \text{自白}) = -20$
- ▶ $f_1(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -5$
- ▶ $f_2(\text{自白}, \text{自白}) = -10$
- ▶ $f_2(\text{自白}, \text{黙秘}) = -20$
- ▶ $f_2(\text{黙秘}, \text{自白}) = 0$
- ▶ $f_2(\text{黙秘}, \text{黙秘}) = -5$

備忘録：囚人のジレンマ

囚人1の 利得行列	囚人2 自白	囚人2 黙秘	囚人2の 利得行列	囚人2 自白	囚人2 黙秘
囚人1	自白	-10	0	囚人1	自白
	黙秘	-20	-5		黙秘

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

6 / 46

戦略形ゲーム

戦略形ゲームにおける仮定

- ▶ 各プレイヤーはどのプレイヤーの戦略集合，利得関数も知っている
(共通知識 (common knowledge))
- ▶ 各プレイヤーは自分の利得を最大化するように行動する
(合理性 (rationality))

備忘録：囚人のジレンマ

囚人1の 利得行列	囚人2 自白	囚人2 黙秘	囚人2の 利得行列	囚人2 自白	囚人2 黙秘
囚人1	自白	-10	0	囚人1	自白
	黙秘	-20	-5		黙秘

岡本 吉央 (電通大)

離散最適化基礎論 (2)

2012年10月12日

8 / 46

戦略形ゲーム (定義)

戦略形ゲーム (strategic game) とは次の3つから構成される .

- ▶ プレイヤーの集合 N
- ▶ 各プレイヤー $i \in N$ に対する戦略の集合 A_i
- ▶ 各プレイヤー $i \in N$ に対する利得関数 $f_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$
 - ▶ 2人ゲームのときは利得行列とも呼ばれる

戦略形ゲームをこれらの組 $(N, \{A_i | i \in N\}, \{f_i | i \in N\})$ で表現

戦略形ゲームを考えたときの目標

各プレイヤーがどのような戦略を取るのか考える

最適反応戦略

ゲームの分析が難しい理由 (の1つ)

- ▶ 他のプレイヤーの取る戦略が分からないから

とりあえず、他のプレイヤーの取る戦略が分かるとすると

- ▶ 自分の利得を最大化する戦略が決まる
- ▶ これを**最適反応戦略** (best-response strategy) と呼ぶ

例：男女の争い

「男女のカップルが外出して、サッカー観戦かコンサートかどちらにいくのか決めたい」という状況

「男女の争い」の利得行列

		女性	
		サッカー	コンサート
男性の 利得行列	サッカー	2	0
	コンサート	0	1
		女性	
		サッカー	コンサート
女性の 利得行列	サッカー	1	0
	コンサート	0	2

例：男女の争い — 女性の最適反応

男女の争い

		女性	
		S	C
男性の 利得行列	S	2	0
	C	0	1
		女性	
		S	C
女性の 利得行列	S	1	0
	C	0	2

男性がSを選ぶと分かっているとき

- ▶ 女性はSの方が利得が大きい
- ▶ ∴ 男性の戦略Sに対して、女性の戦略Sは最適反応

男性がCを選ぶと分かっているとき

- ▶ 女性はCの方が利得が大きい
- ▶ ∴ 男性の戦略Cに対して、女性の戦略Cは最適反応

- 1 戦略形ゲーム
- 2 最適反応戦略
- 3 混合戦略と最適反応戦略
- 4 今日のまとめ

例：囚人のジレンマ

備忘録：囚人のジレンマ

囚人1の 利得行列		囚人2		囚人2の 利得行列		囚人2	
		自白	黙秘			自白	黙秘
囚人1	自白	-10	0	囚人1	自白	-10	-20
	黙秘	-20	-5		黙秘	0	-5

囚人2が「自白」だと分かっているとき

- ▶ 囚人1は「自白」をする方が利得が大きい
- ▶ 囚人2の戦略「自白」に対して、囚人1の戦略「自白」は最適反応

囚人2が「黙秘」だと分かっているとき

- ▶ 囚人1は「自白」をする方が利得が大きい
- ▶ 囚人2の戦略「黙秘」に対して、囚人1の戦略「自白」は最適反応

例：男女の争い — 男性の最適反応

男女の争い

男性の 利得行列		女性		女性の 利得行列		女性	
		S	C			S	C
男性	S	2	0	男性	S	1	0
	C	0	1		C	0	2

女性がSを選ぶと分かっているとき

- ▶ 男性はSの方が利得が大きい
- ▶ ∴ 女性の戦略Sに対して、男性の戦略Sは最適反応

女性がCを選ぶと分かっているとき

- ▶ 男性はCの方が利得が大きい
- ▶ ∴ 女性の戦略Cに対して、男性の戦略Cは最適反応

例：3人じゃんけん

利得関数

プレイヤー1の 利得関数		プレイヤー2								
		G			C			P		
		プレイヤー3 G	C	P	プレイヤー3 G	C	P	プレイヤー3 G	C	P
プレイヤー1	G	0	1	-1	1	1	0	-1	0	-1
	C	-1	-1	0	-1	0	1	0	1	1
	P	1	0	1	0	-1	-1	1	-1	0

プレイヤー2がG、プレイヤー3がPを選ぶと分かっているとき

- ▶ プレイヤー1はPを選ぶと利得が最大になる
- ▶ プレイヤー2の戦略Gとプレイヤー3の戦略Pに対して、プレイヤー1の戦略Pは最適反応

最適反応戦略：定義

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$: 戦略形ゲーム, $N = \{1, \dots, n\}$, n : 自然数

最適反応戦略とは？

- ▶ プレイヤー $i \in N$ を固定
- ▶ i 以外のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 $a_j \in A_j$ を固定
- ▶ 各プレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 $a_j \in A_j$ に対するプレイヤー $i \in N$ の最適反応戦略とは

$$f_i(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) \geq f_i(a_1, a_2, \dots, a'_i, \dots, a_n) \quad \forall a'_i \in A_i$$

を満たす戦略 $a_i \in A_i$ のこと

例：男女の争い (再)

備忘録：男女の争い

	男性の 利得行列	女性 S C	女性の 利得行列	女性 S C
男性	S	2 0	男性	S 1 0
	C	0 1		C 0 2

- ▶ 一方の S に対して他方の S は最適反応
- ▶ 一方の C に対して他方の C は最適反応
- ▶ ∴ 一方の出方を知らないと、どちらか決められない (囚人のジレンマでは現れなかった状況)

例：2人じゃんけん

じゃんけんの利得行列

	P1 の 利得行列				P2 の 利得行列		
	G	C	P		G	C	P
P1	0	1	-1	P1	0	-1	1
	C	-1	0		1	0	-1
	P	1	-1		-1	1	0

- ▶ 両者の戦略が釣り合うところはない (囚人, 男女の争いのどちらとも違う状況)

目次

- 1 戦略形ゲーム
- 2 最適反応戦略
- 3 混合戦略と最適反応戦略
- 4 今日のまとめ

例：囚人のジレンマ (再)

備忘録：囚人のジレンマ

	囚人 1 の 利得行列	囚人 2 自白 黙秘	囚人 2 の 利得行列	囚人 2 自白 黙秘
囚人 1	自白	-10 0	囚人 1	自白
	黙秘	-20 -5		黙秘
				自白
				黙秘
				-10 -20
				0 -5

- ▶ 囚人 2 が自白しようが黙秘しようが、囚人 1 にとって「自白」が最適反応戦略
- ▶ ∴ 囚人 1 は「自白」を選ぶのが合理的
- ▶ 囚人 2 も同様
- ▶ ∴ 囚人 1 も囚人 2 も「自白」を選ぶのが合理的

例：男女の争い (再々)

備忘録：男女の争い

	男性の 利得行列	女性 S C	女性の 利得行列	女性 S C
男性	S	2 0	男性	S 1 0
	C	0 1		C 0 2

- ▶ 両方「サッカー」を選んでいるとする
- ▶ どちらか一方が「コンサート」に変える動機はあるか？
- ▶ ない
 - ▶ なぜなら、利得が下がってしまうから
- ▶ ∴ 両者が「サッカー」は「釣り合っている (ある種の「均衡」であるが、詳細は後で)

ナッシュ均衡

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$: 戦略形ゲーム, $N = \{1, \dots, n\}$, n : 自然数

ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) とは？

- ▶ 各プレイヤー $i \in N$ の戦略 $a_i \in A_i$ を考える
- ▶ 戦略の組 $a = (a_1, \dots, a_n)$ がナッシュ均衡であるとは各プレイヤー $i \in N$ の戦略 a_i が他のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 a_j に対する最適反応であること

先ほどの例

- ▶ 囚人のジレンマ: 「両者とも自白」はナッシュ均衡
- ▶ 男女の争い: 「両者とも S」と「両者とも C」はナッシュ均衡
- ▶ 2人じゃんけん: ナッシュ均衡は存在しない

混合戦略 — 戦略を確率的に拡張

A_i : プレイヤー i の戦略の集合

混合戦略 (mixed strategy) とは？

プレイヤー i の混合戦略とは, A_i 上の確率分布

例: 2人じゃんけん, $A_{P1} = \{G, C, P\}$ に対して,

- ▶ $\left\{ \begin{array}{l} \Pr[P1 \text{ が } G \text{ を選ぶ}] = 0.3, \\ \Pr[P1 \text{ が } C \text{ を選ぶ}] = 0.2, \\ \Pr[P1 \text{ が } P \text{ を選ぶ}] = 0.5 \end{array} \right\}$ という混合戦略
- ▶ $\left\{ \begin{array}{l} \Pr[P1 \text{ が } G \text{ を選ぶ}] = 0.4, \\ \Pr[P1 \text{ が } C \text{ を選ぶ}] = 0.4, \\ \Pr[P1 \text{ が } P \text{ を選ぶ}] = 0.2 \end{array} \right\}$ という混合戦略
- ▶ $\left\{ \begin{array}{l} \Pr[P1 \text{ が } G \text{ を選ぶ}] = 1, \\ \Pr[P1 \text{ が } C \text{ を選ぶ}] = 0, \\ \Pr[P1 \text{ が } P \text{ を選ぶ}] = 0 \end{array} \right\}$ という混合戦略

例：2人じゃんけん

じゃんけんの利得行列

P1の 利得行列		P2			P2の 利得行列		P2		
		G	C	P			G	C	P
P1	G	0	1	-1	P1	G	0	-1	1
	C	-1	0	1		C	1	0	-1
	P	1	-1	0		P	-1	1	0

次の混合戦略を考える

- ▶ $\left\{ \begin{array}{l} \Pr[P1 \text{ が G を選ぶ}] = 0.3, \\ \Pr[P1 \text{ が C を選ぶ}] = 0.2, \\ \Pr[P1 \text{ が P を選ぶ}] = 0.5 \end{array} \right\}$ という P1 の混合戦略
- ▶ $\left\{ \begin{array}{l} \Pr[P2 \text{ が G を選ぶ}] = 0.4, \\ \Pr[P2 \text{ が C を選ぶ}] = 0.4, \\ \Pr[P2 \text{ が P を選ぶ}] = 0.2 \end{array} \right\}$ という P2 の混合戦略

例：2人じゃんけん

次の混合戦略を考える

- ▶ $\Pr[P1 \text{ が G}] = 0.3, \Pr[P1 \text{ が C}] = 0.2, \Pr[P1 \text{ が P}] = 0.5$
- ▶ $\Pr[P2 \text{ が G}] = 0.4, \Pr[P2 \text{ が C}] = 0.4, \Pr[P2 \text{ が P}] = 0.2$

P1 の期待利得は？

P1 に対する 利得行列		P2 に対する確率		
		0.4	0.4	0.2
P1 に対する 確率	0.3	0	1	-1
	0.2	-1	0	1
	0.5	1	-1	0

混合戦略の下での最適反応戦略 (1)

備忘録：男女の争い

男性の 利得行列		女性		女性の 利得行列		女性	
		S	C			S	C
男性	S	2	0	男性	S	1	0
	C	0	1		C	0	2

- ▶ $\Pr[\text{男性が S を選ぶ}] = 0.6, \Pr[\text{男性が C を選ぶ}] = 0.4$ のとき女性の最適反応混合戦略は？
- ▶ $\Pr[\text{女性が S を選ぶ}] = q, \Pr[\text{女性が C を選ぶ}] = 1 - q$ と置く (ただし, $0 \leq q \leq 1$)

最適反応混合戦略

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$: 戦略形ゲーム, $N = \{1, \dots, n\}$, n : 自然数

最適反応混合戦略 (best-response mixed strategy) とは？

- ▶ プレイヤー $i \in N$ を固定
- ▶ i 以外のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の混合戦略 $s_j \in \Delta(A_j)$ を固定
- ▶ 各プレイヤー $j \in N - \{i\}$ の混合戦略 $s_j \in \Delta(A_j)$ に対するプレイヤー $i \in N$ の最適反応混合戦略とは

$$f_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n) \geq f_i(s_1, s_2, \dots, s'_i, \dots, s_n) \quad \forall s'_i \in \Delta(A_i)$$

を満たす混合戦略 $s_i \in \Delta(A_i)$ のこと

例：2人じゃんけん

次の混合戦略を考える

- ▶ $\Pr[P1 \text{ が G}] = 0.3, \Pr[P1 \text{ が C}] = 0.2, \Pr[P1 \text{ が P}] = 0.5$
- ▶ $\Pr[P2 \text{ が G}] = 0.4, \Pr[P2 \text{ が C}] = 0.4, \Pr[P2 \text{ が P}] = 0.2$

P1 の期待利得は？

$$\begin{aligned} & 0 \cdot \Pr[P1 \text{ が G}] \cdot \Pr[P2 \text{ が G}] + 1 \cdot \Pr[P1 \text{ が G}] \cdot \Pr[P2 \text{ が C}] + \\ & (-1) \cdot \Pr[P1 \text{ が G}] \cdot \Pr[P2 \text{ が P}] + (-1) \cdot \Pr[P1 \text{ が C}] \cdot \Pr[P2 \text{ が G}] + \\ & 0 \cdot \Pr[P1 \text{ が C}] \cdot \Pr[P2 \text{ が C}] + 1 \cdot \Pr[P1 \text{ が C}] \cdot \Pr[P2 \text{ が P}] + \\ & 1 \cdot \Pr[P1 \text{ が P}] \cdot \Pr[P2 \text{ が G}] + (-1) \cdot \Pr[P1 \text{ が P}] \cdot \Pr[P2 \text{ が C}] + \\ & 0 \cdot \Pr[P1 \text{ が P}] \cdot \Pr[P2 \text{ が P}] \\ & = 0.3 \cdot 0.4 - 0.3 \cdot 0.2 - 0.2 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.4 - 0.5 \cdot 0.4 \\ & = 0.02 \end{aligned}$$

混合戦略の下での利得

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$: 戦略形ゲーム, $N = \{1, \dots, n\}$, n : 自然数

- ▶ $\Delta(A_i)$: プレイヤー i の混合戦略全体の集合
- ▶ i の利得関数 $f_i: A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$ を, 以下の期待利得関数 $u_i: \Delta(A_1) \times \dots \times \Delta(A_n) \rightarrow \mathbb{R}$ に拡張

$$u_i(s) = \sum_{a \in A_1 \times \dots \times A_n} f_i(a) \cdot \prod_{j \in N} \Pr[\text{プレイヤー } j \text{ が } s_j \text{ において } a_j \text{ を選ぶ}]$$

ここで, $s = (s_1, \dots, s_n), a = (a_1, \dots, a_n)$

- ▶ $\Delta(A_i)$ の要素を混合戦略と呼ぶのに対して, A_i の要素を純粋戦略 (pure strategy) と呼ぶ
- ▶ 純粋戦略は, ある戦略を確率 1 で選び, 他の戦略を確率 0 で選ぶような混合戦略と同一視できる

混合戦略の下での最適反応戦略 (2)

備忘録：男女の争い

男性の 利得行列		女性		女性の 利得行列		女性	
		S	C			S	C
男性	S	2	0	男性	S	1	0
	C	0	1		C	0	2

- ▶ 女性の期待利得 $= 1 \cdot 0.6 \cdot q + 2 \cdot 0.4 \cdot (1 - q) = 0.8 - 0.2q$
- ▶ これは $q = 0$ のとき最大となる
- ▶ \therefore 女性の最適反応は「確率 1 で C を選ぶ」こと (純粋戦略)

混合ナッシュ均衡

$(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$: 戦略形ゲーム, $N = \{1, \dots, n\}$, n : 自然数

混合ナッシュ均衡 (mixed Nash equilibrium) とは？

- ▶ 各プレイヤー $i \in N$ の混合戦略 $s_i \in \Delta(A_i)$ を考える
- ▶ 混合戦略の組 $s = (s_1, \dots, s_n)$ が混合ナッシュ均衡であるとは各プレイヤー $i \in N$ の戦略 s_i が他のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の戦略 s_j に対する最適反応であること

\rightsquigarrow 男女の争いにおける混合ナッシュ均衡を計算してみる

男女の争いの混合ナッシュ均衡 (1)

備忘録：男女の争い

男性の 利得行列	女性 S C	女性の 利得行列	女性 S C
男性 S	2 0	男性 S	1 0
男性 C	0 1	男性 C	0 2

- ▶ $\Pr[\text{男性が S を選ぶ}] = p, \Pr[\text{男性が C を選ぶ}] = 1 - p$ と置く
- ▶ $\Pr[\text{女性が S を選ぶ}] = q, \Pr[\text{女性が C を選ぶ}] = 1 - q$ と置く
- ▶ (ただし, $0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$)

男女の争いの混合ナッシュ均衡 (2)

備忘録：男女の争い

男性の 利得行列	女性 S C	女性の 利得行列	女性 S C
男性 S	2 0	男性 S	1 0
男性 C	0 1	男性 C	0 2

- ▶ 女性の期待利得 $= pq + 2(1-p)(1-q) = (3p-2)q - 2p + 2$

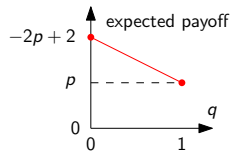
男女の争いの混合ナッシュ均衡 (3)

考えるべき最適化問題

q は変数, p は定数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && (3p-2)q - 2p + 2 \\ &\text{subject to} && 0 \leq q \leq 1 \end{aligned}$$

p の値によって最適解が変わる



$p < 2/3$ のとき, 最適解は $q = 0$

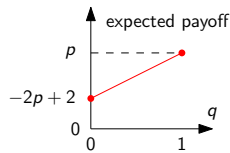
男女の争いの混合ナッシュ均衡 (5)

考えるべき最適化問題

q は変数, p は定数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && (3p-2)q - 2p + 2 \\ &\text{subject to} && 0 \leq q \leq 1 \end{aligned}$$

p の値によって最適解が変わる



$p > 2/3$ のとき, 最適解は $q = 1$

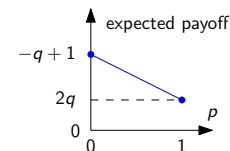
男女の争いの混合ナッシュ均衡 (7)

考えるべき最適化問題

p は変数, q は定数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && (3q-1)p - q + 1 \\ &\text{subject to} && 0 \leq p \leq 1 \end{aligned}$$

q の値によって最適解が変わる



$q < 1/3$ のとき, 最適解は $p = 0$

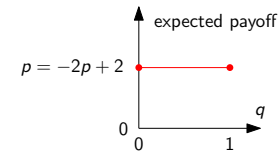
男女の争いの混合ナッシュ均衡 (4)

考えるべき最適化問題

q は変数, p は定数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && (3p-2)q - 2p + 2 \\ &\text{subject to} && 0 \leq q \leq 1 \end{aligned}$$

p の値によって最適解が変わる



$p = 2/3$ のとき, 最適解は $q \in [0, 1]$ のどれも

男女の争いの混合ナッシュ均衡 (6)

備忘録：男女の争い

男性の 利得行列	女性 S C	女性の 利得行列	女性 S C
男性 S	2 0	男性 S	1 0
男性 C	0 1	男性 C	0 2

- ▶ 男性の期待利得 $= 2pq + (1-p)(1-q) = (3q-1)p - q + 1$

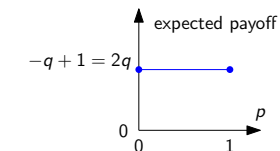
男女の争いの混合ナッシュ均衡 (8)

考えるべき最適化問題

p は変数, q は定数

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && (3q-1)p - q + 1 \\ &\text{subject to} && 0 \leq p \leq 1 \end{aligned}$$

q の値によって最適解が変わる

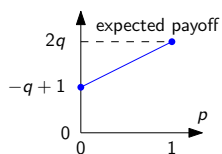


$q = 1/3$ のとき, 最適解は $p \in [0, 1]$ のどれも

考えるべき最適化問題

 p は変数, q は定数

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && (3q-1)p - q + 1 \\ & \text{subject to} && 0 \leq p \leq 1 \end{aligned}$$

 q の値によって最適解が変わる $q > 1/3$ のとき, 最適解は $p = 1$

つまり, 混合ナッシュ均衡は次の 3 つ

- ▶ $\Pr[\text{男性が S を選ぶ}] = 0, \Pr[\text{男性が C を選ぶ}] = 1,$
 $\Pr[\text{女性が S を選ぶ}] = 0, \Pr[\text{女性が C を選ぶ}] = 1$
 - ▶ 両者ともコンサートを確率 1 で選ぶ
 - ▶ 男性の期待利得 = 1, 女性の期待利得 = 2
- ▶ $\Pr[\text{男性が S を選ぶ}] = 2/3, \Pr[\text{男性が C を選ぶ}] = 1/3,$
 $\Pr[\text{女性が S を選ぶ}] = 1/3, \Pr[\text{女性が C を選ぶ}] = 2/3$
 - ▶ 両者とも自分の好む方を確率 $2/3$ で選ぶ
 - ▶ 男性の期待利得 = $2/3$, 女性の期待利得 = $2/3$
- ▶ $\Pr[\text{男性が S を選ぶ}] = 1, \Pr[\text{男性が C を選ぶ}] = 0,$
 $\Pr[\text{女性が S を選ぶ}] = 1, \Pr[\text{女性が C を選ぶ}] = 0$
 - ▶ 両者ともサッカーを確率 1 で選ぶ
 - ▶ 男性の期待利得 = 2, 女性の期待利得 = 1

この中の 1 つ目と 3 つ目は **純粋ナッシュ均衡** (pure Nash equilibrium)

今日やったこと

戦略形ゲームの基礎概念を理解する

- ▶ 戦略形ゲーム: 非協力ゲームの 1 表現, 同時手番
- ▶ 重要概念: 最適反応戦略, 混合戦略, ナッシュ均衡
- ▶ ナッシュ均衡の計算: 2 人ゲーム, 戦略数がそれぞれ 2 の場合

次回以降やること

- ▶ もう少し複雑な場合に, ナッシュ均衡をどう計算するか考える
- ▶ ただし, プレイヤーの数は 2 に限る
- ▶ そもそもナッシュ均衡はあるのか?

男性の最適反応

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} q & 0 & \dots & 1/3 & \dots & 1 \\ \hline p & 0 & \dots & [0, 1] & \dots & 1 \end{array}$$

女性の最適反応

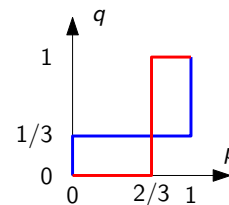
$$\begin{array}{c|ccc|ccc} p & 0 & \dots & 2/3 & \dots & 1 \\ \hline q & 0 & \dots & [0, 1] & \dots & 1 \end{array}$$

互いに最適反応となるのは

- ▶ $(p, q) = (0, 0)$
- ▶ $(p, q) = (2/3, 1/3)$
- ▶ $(p, q) = (1, 1)$

のとき

表を図示



- 1 戦略形ゲーム
- 2 最適反応戦略
- 3 混合戦略と最適反応戦略
- 4 今日のまとめ