

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

復習問題 13.1 単一財封印入札オークションにおいて、第一価格オークションが個人合理性と上位落札性は満たすが、耐戦略性を満たさないことを証明せよ。

復習問題 13.2 単一財封印入札オークションにおいて、第二価格オークションが個人合理性、上位落札性、耐戦略性の3つの性質をすべて満たすことを証明せよ。

復習問題 13.3 買い手が2人である単一財封印入札オークションにおいて、個人合理性、上位落札性、耐戦略性の3つの性質をすべて満たすルールが第二価格オークションであることを以下の方針に従って証明せよ。

2人の買い手を B_1, B_2 として、彼らの申告額をそれぞれ b_1, b_2 とする。証明は $b_1 > b_2$ の場合だけ行う。(その他の場合は同様に証明できる。) 上位落札性より勝者は B_1 である。落札価格を p とする。 $b'_1 > b_1$ を満たす任意の b'_1 を考え、 B_1 の申告額が b'_1 、 B_2 の申告額が b_2 のとき、落札価格が p' であるとする。

1. $p = p'$ となることを証明せよ。
2. $p \leq b_2$ となることを証明せよ。
3. $p = b_2$ となることを証明せよ。(ヒント、 $p < b_2$ であると仮定したとき、 $p < b'_1 < b_2$ を満たす b'_1 の存在に着目せよ。)

復習問題 13.4 売り手が1人、買い手が1人のダブルオークションにおいて、個人合理性、上位落札性、耐戦略性、予算バランスのすべてを満たすルールが存在しないことを以下の方針に従って証明せよ。

1. 売り手の申告額が2、買い手の申告額が4のとき、上位落札性より取引は行われる。その売り手の支払額を $p_{2,4}$ とする。また、売り手の申告額が3、買い手の申告額が4のときも、上位落札性より取引は行われる。その売り手の支払額を $p_{3,4}$ とする。このとき、 $3 \leq p_{3,4} = p_{2,4}$ が成り立つことを証明せよ。
2. 売り手の申告額が1、買い手の申告額が4のとき、上位落札性より取引は行われる。その売り

手の支払額を $p_{1,4}$ とする。売り手の申告額が1、買い手の申告額が2のときも、上位落札性より取引は行われる。その売り手の支払額を $p_{1,2}$ とする。このとき、 $2 \geq p_{1,2} = p_{1,4}$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント：買い手の受取額に着目して、予算バランスを用いよ。)

3. 証明全体を完成させよ。

追加問題 13.5 単一財封印入札オークションにおいて、次のような第三価格オークションを考える。(ただし、 $n \geq 3$ とする) すなわち、申告額 b_1, \dots, b_n が与えられたとき、勝者は $b_i = b[1]$ を満たす買い手 B_i (最高申告額を持つ買い手) として、価格は $b[3]$ (三番目に高い申告額) とする。第三価格オークションが個人合理性と上位落札性を満たすことを証明せよ。また、耐戦略性を満たさないことを、例によって証明せよ。すなわち、第三価格オークションにおいて評価額を申告額とすることが他の買い手の任意の戦略に対する最適反応にならないような例を構成せよ。

追加問題 13.6 単一財封印入札オークションにおいて、次のような留保価格付き第二価格オークションを考える。非負実数 $r \geq 0$ が予め決められている。申告額 b_1, \dots, b_n が与えられたとき、勝者を次のように決める。 $b[1] < r$ であるとき、勝者はいない(取引は行われない)。 $b[1] \geq r$ であるとき、勝者は $b_i = b[1]$ を満たす買い手 B_i である。このとき、価格は $\max\{r, b[2]\}$ である。留保価格付き第二価格オークションが個人合理性と耐戦略性を満たすが、上位落札性を満たさないことを証明せよ。