

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

この演習問題では、売り手の集合 $\{s_1, \dots, s_m\}$ と買い手の集合 $\{b_1, \dots, b_n\}$ 、そして、売り手 s_i と買い手 b_j が取引を行ったときにその2人が得る利得の和が a_{ij} であるとする。この状況において、利得総和を最大にする取引を求める割当問題、そして、最大化された利得総和を売り手と買い手に分配する利得配分問題を割当ゲームの枠組で考える。

復習問題 12.1 次に示す、割当問題の線形計画緩和 (R) を考える。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad \text{for all } i \in \{1, \dots, m\} \\ &&& \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad \text{for all } j \in \{1, \dots, n\} \\ &&& x_{ij} \geq 0 \quad \text{for all } i \in \{1, \dots, m\}, \\ &&& \quad \quad \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

ただし、変数は x_{ij} である。

1. この問題 (R) の双対問題 (D) を書き下せ。
2. 割当ゲームに対する利得ベクトル $(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ がそのコアの要素であることと、このベクトルが (D) の最適解であることが同値であることを証明せよ。

復習問題 12.2 次の行列 $A = (a_{ij})$ を係数行列とする割当問題から派生する割当ゲームを考える。利得ベクトルがそのコアの要素であるための必要十分条件を与えよ。

1. $A = \begin{pmatrix} 100 & 120 \\ 100 & 50 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 30 \\ 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

復習問題 12.3 割当ゲームに対する利得ベクトル $(y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$ がそのコアの要素であると仮定する。いま、利得総和を最大にする取引に対応す

るマッチングにおいて、売り手 s_i がある買い手と取引を行い、その買い手が $b_{\mu(i)}$ であるとする。このとき、

$$y_i + z_{\mu(i)} = a_{i, \mu(i)}$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 12.4 $m = 8, n = 10$ であり、各売り手と買い手が馬に対して次のような評価額を持つ Böhm-Bawerk の馬市場を考える。

| 売り手 | 評価額 | 買い手 | 評価額 |
|-------|-----|----------|-----|
| s_1 | 10 | b_1 | 30 |
| s_2 | 11 | b_2 | 28 |
| s_3 | 15 | b_3 | 26 |
| s_4 | 17 | b_4 | 24 |
| s_5 | 20 | b_5 | 22 |
| s_6 | 21 | b_6 | 21 |
| s_7 | 25 | b_7 | 20 |
| s_8 | 26 | b_8 | 18 |
| | | b_9 | 17 |
| | | b_{10} | 15 |

この馬市場における需要曲線と供給曲線を描き、プレイヤーの利得総和が最大となる取引において、どの取引価格で何頭の馬が売買されるか、定めよ。

追加問題 12.5 $m = 8, n = 10$ であり、各売り手と買い手が馬に対して次のような評価額を持つ Böhm-Bawerk の馬市場を考える。

| 売り手 | 評価額 | 買い手 | 評価額 |
|-------|-----|----------|-----|
| s_1 | 4 | b_1 | 30 |
| s_2 | 6 | b_2 | 28 |
| s_3 | 10 | b_3 | 26 |
| s_4 | 12 | b_4 | 22 |
| s_5 | 16 | b_5 | 20 |
| s_6 | 22 | b_6 | 14 |
| s_7 | 26 | b_7 | 14 |
| s_8 | 26 | b_8 | 12 |
| | | b_9 | 12 |
| | | b_{10} | 8 |

この馬市場における需要曲線と供給曲線を描き、プレイヤーの利得総和が最大となる取引において、どの取引価格で何頭の馬が売買されるか、定めよ。

追加問題 12.6 次の行列 $A = (a_{ij})$ を係数行列とする割当問題から派生する割当ゲームを考える。利得ベクトルがそのコアの要素であるための必要十分条件を与えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$