

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

復習問題 11.1 自然数  $m, n$  と行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ベクトル  $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$  を考える。次の 01 整数線形計画問題 (P)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \geq b, x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

とその線形計画緩和 (R)

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^\top x \\ & \text{subject to} && Ax \geq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

を考える。

1. (P) と (R) に最適解が存在するとき, (P) の最適値が (R) の最適値以上であることを証明せよ。
2. (P) と (R) に最適解が存在するとき, (R) の最適解  $x$  が  $x \in \{0, 1\}^n$  を満たすならば,  $x$  は (P) の最適解であることを証明せよ。

復習問題 11.2 割当問題の制約を表す不等式系の係数行列を考える。その行列の任意の小正方形の行列式は  $0, 1, -1$  のいずれかであることを証明せよ。

補足問題 11.3 成分がどれも整数である正方形の行列式は整数であることを証明せよ。

追加問題 11.4 成分がどれも  $0$  か  $1$  である正方形で, その行列式が  $0, 1, -1$  のどれでもないものを構成してみよ。

追加問題 11.5 各行に  $1$  がちょうど  $1$  つ,  $-1$  がちょうど  $1$  つあり, その他の成分はすべて  $0$  であるような行列を考える。例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

はそのような行列である。このような任意の行列に対して, 各正方形小行列の行列式が  $0, 1, -1$  のいずれかになることを証明せよ。