離散最適化基礎論 (10) **2013 年 1 月 11 日**
演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．

復習問題 10.1 プレイヤーの集合を $N=\{1,2,3\}$ として，次の特性関数 $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ を考える．

- $v(\emptyset)=0$
- $v(\{1\})=10$
- $v(\{2\})=10$
- $v(\{3\})=20$
- $v(\{1,2\})=20$
- $v(\{1,3\})=30$
- $v(\{2,3\})=35$
- $v(\{1,2,3\})=50$

特性関数形ゲーム (N,v) に対する提携形成問題の最適解と最適値を答えよ．

復習問題 10.2 任意の優加法的ゲーム (N,v) を考える．任意の提携 $S,T,U \subseteq N$ に対して，$S\cap T=\emptyset$, $S\cap U=\emptyset$，かつ，$T\cap U=\emptyset$ ならば，$v(S)+v(T)+v(U)\leq v(S\cup T\cup U)$ となることを証明せよ．

復習問題 10.3 任意の優加法的ゲーム (N,v) に対して，$\{N\}$ が提携形成問題の最適解になることを証明せよ．

復習問題 10.4 (10.3 と同じ問題だったので削除．)

復習問題 10.5 任意の優加法的ゲーム (N,v) に対して，全体合理性と個人合理性を満たす利得ベクトルが存在することを証明せよ．

復習問題 10.6 演習問題 10.1 にある特性関数形ゲーム (N,v) に関して，全体合理性と個人合理性を満たす利得ベクトル全体を図示せよ．

復習問題 10.7 演習問題 10.1 にある特性関数形ゲーム (N,v) に関して，コアを図示せよ．

補足問題 10.8 任意の優加法的ゲーム (N,v) を考える．プレイヤー集合 N の任意の分割 $\{S_1,\dots,S_k\}$ に対して，$v(S_1)+\cdots+v(S_k)\leq v(N)$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 10.9 優加法的であるが，コアが空であるような特性関数形ゲームを具体的に挙げよ．(なぜ優加法的であるのか，なぜコアが空であるのかも説明せよ．) ヒント：プレイヤーが 3 人の場合を考えてみよ．

追加問題 10.10 プレイヤーの集合を $N=\{1,2,3\}$ として，次の特性関数 $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ を考える．

- $v(\emptyset)=0$
- $v(\{1\})=0$
- $v(\{2\})=0$
- $v(\{3\})=0$
- $v(\{1,2\})=10$
- $v(\{1,3\})=7$
- $v(\{2,3\})=4$
- $v(\{1,2,3\})=12$

このゲームのコアを図示せよ．

追加問題 10.11 一般に，重み付き多数決ゲームでは，プレイヤー集合 $N=\{1,2,\dots,n\}$ を考えて，議決定足数と呼ばれる非負実数 $q\in\mathbb{R}$ と各プレイヤー $i\in N$ に対する非負の重み $w_i\in\mathbb{R}$ が与えられている状況を考える．各提携 $S\subseteq N$ に対する特性関数値 $v(S)$ は次のように定められる．

$$v(S)=\begin{cases}0 & (\sum_{i\in S} w_i < q \text{ のとき})\\ 1 & (\sum_{i\in S} w_i \geq q \text{ のとき}).\end{cases}$$

条件 $\frac{1}{2}\sum_{i\in N} w_i < q$ を満たすとき，この特性関数形ゲームは優加法的であることを証明せよ．