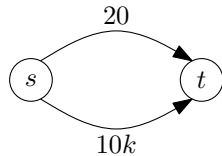


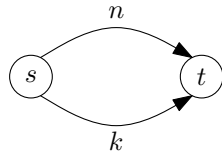
注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

復習問題 9.1 次の図で表される経路選択ゲームを考える。ただし、プレイヤー数は2であり、どちらのプレイヤーも s から t へ至る経路を選択する。



このゲームにおけるナッシュ均衡をすべて挙げ、各ナッシュ均衡における移動時間総和を答えよ。

復習問題 9.2 次の図で表される経路選択ゲームを考える。ただし、プレイヤー数は n であり、どのプレイヤーも s から t へ至る経路を選択する。ただし、 n は偶数であると仮定する。



1. このゲームにおけるナッシュ均衡をすべて挙げ、各ナッシュ均衡における移動時間総和を答えよ。
2. このゲームにおける社会的最適解を1つ挙げ、それにおける移動時間総和を答えよ。
3. このゲームの無秩序の代償が $4/3$ であることを証明せよ。

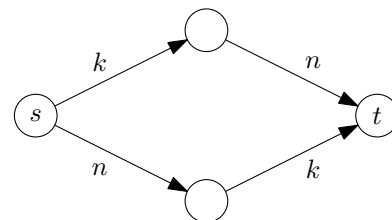
復習問題 9.3 次の手順に従って、「各弧の費用関数が線形である経路選択ゲームの無秩序の代償は必ず $\frac{5}{2}$ 以下である」ことを証明せよ。ただし、「各弧の費用関数が線形である」とは、グラフの各弧 e に対する費用関数 c_e がある非負実数 a_e を用いて $c_e(k) = a_e k$ と書けることを意味する。

考える有向グラフは $G = (V, E)$ であるとする。社会的余剰を最小にする(純粋)ナッシュ均衡において、プレイヤー i が選択する経路を P_i 、弧 $e \in E$ を使うプレイヤーの数を n_e 、移動時間総和(つまり、社会的余剰)を C とする。また、社会的最適解において、

プレイヤー i が選択する経路を P_i^* 、弧 $e \in E$ を使うプレイヤーの数を n_e^* 、移動時間総和(つまり、社会的余剰)を C^* とする。証明すべきことは $C \leq \frac{5}{2} C^*$ である。

1. $C = \sum_{e \in E} a_e n_e^2$ および $C^* = \sum_{e \in E} a_e n_e^{*2}$ となることを証明せよ。
2. 各プレイヤー i に対して $\sum_{e \in P_i} a_e n_e \leq \sum_{e \in P_i^*} a_e (n_e + 1)$ が成り立つことを証明せよ。
3. $C \leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{1}{3} n_e^2 + \frac{3}{4} n_e^{*2} - \frac{1}{3} \left(n_e - \frac{3}{2} n_e^* \right)^2 + n_e^* \right)$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント：下にある補足問題 9.6 の結果を用いてもよい。)
4. $C \leq \sum_{e \in E} a_e \left(\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2} \left(n_e - \frac{3}{2} n_e^* \right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \right)$ が成り立つことを証明せよ。
5. 任意の弧 $e \in E$ に対して $\frac{9}{8} n_e^{*2} - \frac{1}{2} \left(n_e - \frac{3}{2} n_e^* \right)^2 + \frac{3}{2} n_e^* \leq \frac{5}{2} n_e^{*2}$ が成り立つことを証明せよ。
6. 証明全体を完了させて、 $C \leq \frac{5}{2} C^*$ となることを導いてみよ。

復習問題 9.4 次の図で表される経路選択ゲームを考える。ただし、プレイヤー数は n であり、どのプレイヤーも s から t へ至る経路を選択する。ただし、 n は偶数であると仮定する。

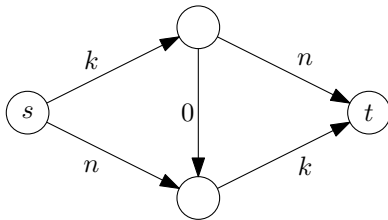


1. このゲームにおけるナッシュ均衡をすべて挙げ、各ナッシュ均衡における移動時間総和を答えよ。

- このゲームにおける社会的最適解を1つ挙げ、それにおける移動時間総和を答えよ。
- このゲームの無秩序の代償を計算せよ。

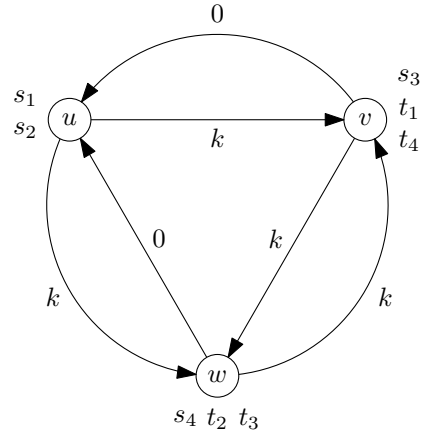
- このゲームの無秩序の代償が $\frac{5}{3}$ 以上であることを証明せよ。

復習問題 9.5 次の図で表される経路選択ゲームを考える。ただし、プレイヤー数は n であり、どのプレイヤーも s から t へ至る経路を選択する。ただし、 n は4で割り切れると仮定する。



- このゲームにおけるナッシュ均衡をすべて挙げ、各ナッシュ均衡における移動時間総和を答えよ。
- このゲームにおける社会的最適解を1つ挙げ、それにおける移動時間総和を答えよ。
- このゲームの無秩序の代償を計算せよ。

追加問題 9.8 次の図で表される経路選択ゲームを考える。ただし、プレイヤー数は4であり、各プレイヤー i は s_i から t_i へ至る経路を選択する。



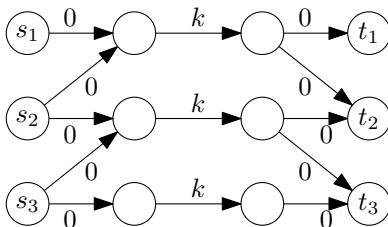
- このゲームにおいて、移動時間総和が4になるような各プレイヤーの純粋戦略を見つけよ。
- このゲームにおけるナッシュ均衡で、移動時間総和が10になるものを見つけよ。
- このゲームの無秩序の代償が $\frac{5}{2}$ 以上であることを証明せよ。

補足問題 9.6 任意の実数 α, β に対して

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{3}{4}\beta^2 - \frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{3}{2}\beta\right)^2$$

が成り立つことを証明せよ。

追加問題 9.7 次の図で表される経路選択ゲームを考える。ただし、プレイヤー数は3であり、各プレイヤー i は s_i から t_i へ至る経路を選択する。



- このゲームにおいて、移動時間総和が3になるような各プレイヤーの純粋戦略を見つけよ。
- このゲームにおけるナッシュ均衡で、移動時間総和が5になるものを見つけよ。