離散最適化基礎論 (5) 　　**2012 年 11 月 2 日**

演習問題 　　**岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．

復習問題 5.1　次の行列 A, B で定義される双行列ゲームを考える．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

この双行列ゲームの混合ナッシュ均衡をすべて挙げ，その均衡における両プレイヤーの期待利得を計算せよ．

復習問題 5.2　次の行列 A, B で定義される双行列ゲームを考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

この双行列ゲームの混合ナッシュ均衡をすべて挙げ，その均衡における両プレイヤーの期待利得を計算せよ．

補足問題 5.3　m, n は自然数であるとして，行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を考える．いま，ベクトル $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ と実数 $u, v \in \mathbb{R}$ が次の 4 条件を満たしているとする．

1. $x \geq 0, \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$
2. 任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$u \geq a_{i\bullet} y.$
3. $y \geq 0, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$
4. 任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$v \geq b_{\bullet j}^{\top} x.$

ただし，$a_{i\bullet} \in \mathbb{R}^n$ は行列 A の第 i 行ベクトル，$b_{\bullet j} \in \mathbb{R}^m$ は行列 B の第 j 列ベクトルであるとする．このとき，次の 2 条件 (A) と (B) が同値であることを証明せよ．

(A) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i (u - a_{i\bullet} y) = 0$ かつ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \left(v - b_{\bullet j}^{\top} x\right) = 0.$

(B) 「任意の $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$x_i = 0$ または $u - a_{i\bullet} y = 0$」かつ「任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$y_j = 0$ または $v - b_{\bullet j}^{\top} x = 0.$」

追加問題 5.4　次の行列 A, B で定義される双行列ゲームを考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

この双行列ゲームの混合ナッシュ均衡を 1 つ挙げ，その均衡における両プレイヤーの期待利得を計算せよ．