離散最適化基礎論 (4) **2012年10月26日**

演習問題 **岡本 吉央**

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと．

復習問題 4.1 次の線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 \geq -2, \\ & x_2 \geq -1, \\ & x_1 - x_2 \geq -4, \\ & -x_1 - x_2 \geq -3, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq -6. \end{array}$$

ただし，$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数である．

1. この問題の双対問題を書き下してみよ．
2. 双対問題を利用して，$(x_1, x_2) = (-3/2, -1)$ がこの問題の最適解であることを証明せよ．

復習問題 4.2 次の線形計画問題 (主問題) を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \geq b. \end{array}$$

ただし，$x \in \mathbb{R}^n$ は変数であり，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数である．この問題の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y = c, y \geq 0 \end{array}$$

である．ただし，$y \in \mathbb{R}^m$ は変数である．

1. 主問題の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ と双対問題の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ に対して，$c^\top x \geq b^\top y$ が成り立つことを証明せよ．
2. 主問題の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ と双対問題の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ が $c^\top x = b^\top y$ を満たすならば，x が主問題の最適解であり，y が双対問題の最適解であることを証明せよ．

復習問題 4.3 次の線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ \text{subject to} & -2x_1 \geq -4, \\ & -x_1 - 2x_3 \geq -8, \\ & -3x_2 - x_3 \geq -6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

ただし，$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数である．単体法により，この線形計画問題の最適解を 1 つ見つけよ．ただし，$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ という点がこの問題の許容領域の頂点であるという事実を用いてもよい．

追加問題 4.4 次の線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_2 \geq -1, \\ & -x_1 + x_2 \geq -2, \\ & -x_1 - x_2 \geq -3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

ただし，$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数である．単体法により，この線形計画問題の最適解を 1 つ見つけよ．ただし，$(x_1, x_2) = (0, 0)$ という点がこの問題の許容領域の頂点であるという事実を用いてもよい．

追加問題 4.5 次の線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -5x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 8x_4 \\ \text{subject to} & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq -5, \\ & -x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \geq -3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array}$$

ただし，$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ は変数である．単体法により，この線形計画問題の最適解を 1 つ見つけよ．ただし，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ という点がこの問題の許容領域の頂点であるという事実を用いてもよい．