

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

復習問題 3.1 プレイヤー 1 が次の利得行列  $A$  を持つ戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

このゲームの混合ナッシュ均衡をすべて挙げよ。

復習問題 3.2 プレイヤー 1 が次の利得行列  $A$  を持つ戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

このゲームの混合ナッシュ均衡をすべて挙げよ。

復習問題 3.3 次の線形計画問題を基準形に変換せよ。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && 3x_1 - 2x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 + x_2 = 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

復習問題 3.4 次の線形計画問題を基準形に変換せよ。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && 3x_1 - 2x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 + x_2 \geq 4, x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

復習問題 3.5 自然数  $n$  を考え,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  を使って凸多面体  $P$  を  $P = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$  と定義する。このとき, 基準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^\top x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

を考える。ただし,  $c \in \mathbb{R}^n$  である。この問題に最適解が存在するとき, 最適解全体の集合は  $P$  の面であることを証明せよ。

追加問題 3.6 プレイヤー 1 が次の利得行列  $A$  を持つ戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このゲームの混合ナッシュ均衡をすべて挙げよ。

追加問題 3.7 プレイヤー 1 が次の利得行列  $A$  を持つ戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

このゲームの混合ナッシュ均衡をすべて挙げよ。

追加問題 3.8 次の線形計画問題を基準形に変換せよ。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ &\text{subject to} && x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ &&& 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

追加問題 3.9 凸多面体  $P$  と  $P$  上の線形関数で, 対応する線形計画問題が最適解を持つが,  $P$  の頂点となる最適解を持たないものを構成せよ。

追加問題 3.10 プレイヤー 1 が利得行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  を持つ戦略形 2 人ゼロ和ゲームを考える。プレイヤー 1 の混合戦略  $x \in \mathbb{R}^m$  とプレイヤー 2 の混合戦略  $y \in \mathbb{R}^n$  の組  $(x, y)$  がこのゲーム混合ナッシュ均衡であり, プレイヤー 1 の混合戦略  $x' \in \mathbb{R}^m$  とプレイヤー 2 の混合戦略  $y' \in \mathbb{R}^n$  の組  $(x', y')$  がこのゲーム混合ナッシュ均衡であると仮定する。このとき,  $(x, y')$  と  $(x', y)$  もこのゲームの混合ナッシュ均衡であることを証明せよ。(ヒント: 混合ナッシュ均衡の定義に基づいて,  $x^\top Ay = x^\top Ay' = x'^\top Ay = x'^\top Ay'$  となることをまず示してみよ。証明がそれだけでは終わらないことにも注意せよ。)