

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

復習問題 2.1 「囚人のジレンマ」と呼ばれる次の以下の問いに答えよ。
戦略形ゲーム $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ を考える。

- $N = \{1, 2\}$.
- $A_1 = A_2 = \{D, C\}$.
- $f_1(D, D) = f_2(D, D) = -10,$
 $f_1(D, C) = f_2(C, D) = 0,$
 $f_1(C, D) = f_2(D, C) = -20,$
 $f_1(C, C) = f_2(C, C) = -5.$

これを利得行列の形で書けば以下の通りになる。

1 の 利得行列	2	2 の 利得行列	2
	D C		D C
1	D	1	D
	-10 0		-10 -20
	C	1	C
	-20 -5		0 -5

以下の問いに答えよ。

1. プレイヤー 1 の戦略 D に対するプレイヤー 2 の最適反応戦略は何か？
2. プレイヤー 1 の戦略 C に対するプレイヤー 2 の最適反応戦略は何か？
3. このゲームの純粋ナッシュ均衡をすべて挙げよ。
(存在しない場合は「存在しない」と答えよ。)

復習問題 2.2 「男女の争い」と呼ばれる次の戦略形ゲーム $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ を考える。

- $N = \{1, 2\}$.
- $A_1 = A_2 = \{S, C\}$.
- $f_1(S, S) = f_2(C, C) = 2,$
 $f_1(C, C) = f_2(S, S) = 1,$
 $f_1(S, C) = f_1(C, S) = f_2(S, C) = f_2(C, S) = 0.$

これを利得行列の形で書けば以下の通りになる。

1 の 利得行列	2	2 の 利得行列	2
	S C		S C
1	S	1	S
	2 0		1 0
	C	1	C
	0 1		0 2

1. プレイヤー 1 の戦略 S に対するプレイヤー 2 の最適反応戦略は何か？
2. プレイヤー 1 の戦略 C に対するプレイヤー 2 の最適反応戦略は何か？
3. プレイヤー 2 の戦略 S に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略は何か？
4. プレイヤー 2 の戦略 C に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略は何か？
5. このゲームの純粋ナッシュ均衡をすべて挙げよ。
(存在しない場合は「存在しない」と答えよ。)

復習問題 2.3 「2人じゃんけん」と呼ばれる次の戦略形ゲーム $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ を考える。

- $N = \{1, 2\}$.
- $A_1 = A_2 = \{G, C, P\}$.
- $f_1(G, C) = f_2(G, C) = f_1(C, P) = f_2(C, P) =$
 $f_1(P, G) = f_2(P, G) = 1,$
 $f_1(G, P) = f_2(G, P) = f_1(C, G) = f_2(C, G) =$
 $f_1(P, C) = f_2(P, C) = -1,$
 $f_1(G, G) = f_2(G, G) = f_1(C, C) = f_2(C, C) =$
 $f_1(P, P) = f_2(P, P) = 0.$

これを利得行列の形で書けば以下の通りになる。

プレイヤー 1 の 利得行列	2
	G C P
1	G
	0 1 -1
	C
	-1 0 1
	P
	1 -1 0
プレイヤー 2 の 利得行列	2
	G C P
1	G
	0 -1 1
	C
	1 0 -1
	P
	-1 1 0

プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の次の混合戦略を考える .

$$\begin{aligned} \Pr[1 \text{ が G を選ぶ}] &= 0.3, \\ \Pr[1 \text{ が C を選ぶ}] &= 0.2, \\ \Pr[1 \text{ が P を選ぶ}] &= 0.5, \\ \Pr[2 \text{ が G を選ぶ}] &= 0.4, \\ \Pr[2 \text{ が C を選ぶ}] &= 0.4, \\ \Pr[2 \text{ が P を選ぶ}] &= 0.2. \end{aligned}$$

この混合戦略におけるプレイヤー 1 の期待利得を計算せよ .

復習問題 2.4 上の「男女の争い」において, 混合ナッシュ均衡をすべて挙げ, そのそれぞれにおける各プレイヤーの期待利得を計算せよ . (存在しない場合は「存在しない」と答えよ .)

補足問題 2.5 上の「2人じゃんけん」において, 純粋ナッシュ均衡をすべて挙げ, そのそれぞれにおける各プレイヤーの期待利得を計算せよ . (存在しない場合は「存在しない」と答えよ .)

追加問題 2.6 上の「囚人のジレンマ」における混合ナッシュ均衡をすべて挙げ, そのそれぞれにおける各プレイヤーの期待利得を計算せよ . (存在しない場合は「存在しない」と答えよ .)

追加問題 2.7 次の戦略形ゲーム $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ を考える .

- $N = \{1, 2\}$.
- $A_1 = A_2 = \{H, T\}$.
- $f_1(H, H) = f_1(T, T) = f_2(H, T) = f_2(T, H) = 1$,
 $f_1(H, T) = f_1(T, H) = f_2(H, H) = f_2(T, T) = -1$,

これを利得行列の形で書けば以下の通りになる .

1 の 利得行列		2		2 の 利得行列		2	
		H	T			H	T
1	H	1	-1	1	H	-1	1
	T	-1	1		T	1	-1

このゲームにおける混合ナッシュ均衡をすべて挙げ, そのそれぞれにおける各プレイヤーの期待利得を計算せよ . (存在しない場合は「存在しない」と答えよ .)

追加問題 2.8 次の戦略形ゲーム $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ を考える .

- $N = \{1, 2\}$.
- $A_1 = A_2 = \{H, D\}$.
- $f_1(H, D) = f_2(D, H) = 2$,
 $f_1(D, D) = f_2(D, D) = 1$,
 $f_1(D, H) = f_2(H, D) = 0$,
 $f_1(H, H) = f_2(H, H) = -1$.

これを利得行列の形で書けば以下の通りになる .

1 の 利得行列		2		2 の 利得行列		2	
		H	D			H	D
1	H	-1	2	1	H	-1	0
	D	0	1		D	2	1

このゲームにおける混合ナッシュ均衡をすべて挙げ, そのそれぞれにおける各プレイヤーの期待利得を計算せよ . (存在しない場合は「存在しない」と答えよ .)

追加問題 2.9 戦略形ゲーム $(N, \{A_i \mid i \in N\}, \{f_i \mid i \in N\})$ を考える (ただし, $N = \{1, \dots, n\}$, n は自然数とする) . プレイヤー i の戦略 $a_i^* \in A_i$ が支配戦略であるとは, 任意の $a_i \in A_i$ と他のプレイヤー $j \in N - \{i\}$ の任意の戦略 a_j に対して

$$f_i(a_1, \dots, a_i^*, \dots, a_n) \geq f_i(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

が成り立つことである .

すべてのプレイヤー i が支配戦略 $a_i^* \in A_i$ を持つとき, 戦略の組 (a_1^*, \dots, a_n^*) はこのゲームの (混合戦略まで考えた場合の) ナッシュ均衡であることを証明せよ .