

注意： 解答がどのように導かれるのかを必ず書き下すこと。

復習問題 1.1 任意の自然数 n と任意の凸集合 $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, $S \cap T$ も凸集合であることを証明せよ.

復習問題 1.2 任意の自然数 n と任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, P が凸集合であることを証明せよ.

復習問題 1.3 任意の自然数 n と任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, P が P の面であることを証明せよ.

復習問題 1.4 任意の自然数 n と任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, 空集合 \emptyset が P の面であることを証明せよ.

復習問題 1.5 任意の自然数 n と任意の凸多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^n$, そして, P の任意の面 F を考える. このとき, F も凸多面体であることを証明せよ.

復習問題 1.6 3次元立方体には頂点がいくつあるか? 辺はいくつあるか? ファセットはいくつあるか?

補足問題 1.7 任意の自然数 n と任意の集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して以下を証明せよ.

1. S が \mathbb{R}^n の閉半空間であるとき, S は凸集合である.
2. S が \mathbb{R}^n の開半空間であるとき, S は凸集合である.

補足問題 1.8 任意の自然数 n, m と任意の凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n, T \subseteq \mathbb{R}^m$ に対して, $S \times T$ も凸集合であることを証明せよ.

追加問題 1.9 任意の自然数 n に対して, 次の集合

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$$

が凸であることを証明せよ. (ヒント: コーシー・シュヴァルツの不等式を利用してもよい.)

追加問題 1.10 任意の自然数 n と2つの集合 $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, X と Y のミンコフスキー和を

$$X + Y = \{x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in X \text{ かつ } y \in Y\}$$

として定義する. 集合 X と Y が凸であるとき, $X + Y$ も凸であることを証明せよ.

追加問題 1.11 次の凸多面体 P を考える.

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n.$$

ただし, すべての $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $a_i \leq b_i$ であるとする. 凸多面体 P の次元は何だろうか? (注意: $a_i = b_i$ となることもある.)

追加問題 1.12 3以上の任意の自然数 n に対して, 3次元正 n 角柱を考える. 下の図は $n = 5$ の場合である. 3次元正 n 角柱に頂点はいくつあるか? 辺はいくつあるか? ファセットはいくつあるか?

