離散数学
証明のテンプレート：表と雛形

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2012 年 7 月 25 日

最終更新：2012 年 7 月 25 日　11:24

テンプレート：使える性質に $\wedge$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$P \wedge Q$	◯◯◯

変更後

使える性質	導く性質
$P \wedge Q$	◯◯◯
P	
Q	

証明の雛形に変更はない

テンプレート：導く性質に $\wedge$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
◯◯◯	$P \wedge Q$

変更後

使える性質	導く性質
◯◯◯	$\cancel{P \wedge Q}$
	P

と

使える性質	導く性質
◯◯◯	Q

テンプレート：導く性質に $\wedge$ があるとき (証明の雛形)

まず P を示す．

ここで「P」を結論として導く．

次に Q を示す．

ここで「Q」を結論として導く．

したがって，$P \wedge Q$ が成立する．

テンプレート：使える性質に $\vee$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\neg P$	◯◯◯
$P \vee Q$	

変更後

使える性質	導く性質
$\neg P$	◯◯◯
$P \vee Q$	
Q	

この推論は選言三段論法とも呼ばれる．

テンプレート：使える性質に $\vee$ があるとき (証明の雛形)

$\neg P$ と $P \vee Q$ より，Q が成り立つ．
ここで「◯◯◯」を結論として導く．

テンプレート：使える性質に $\vee$ があるとき Part II (表)

変更前

使える性質	導く性質
$P \vee Q$	◯◯◯

変更後

使える性質	導く性質
$P \vee Q$ P	◯◯◯

と

使える性質	導く性質
$P \vee Q$ Q	◯◯◯

これは**場合分けによる証明**と呼ばれる手法である

テンプレート：使える性質に $\vee$ があるとき Part II (証明の雛形)

第 1 の場合：P であると仮定する．

ここで「◯◯◯」を結論として導く．

第 2 の場合：Q であると仮定する．

ここで「◯◯◯」を結論として導く．

したがって，「$P \vee Q$ ならば◯◯◯」となる．

テンプレート：導く性質に $\vee$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P \vee Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{P \vee Q}$
$\neg P$	Q

これは

$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$$

に基づく変更 (含意の除去)

テンプレート：導く性質に $\vee$ があるとき (証明の雛形)

P ではないと仮定する．

ここで「Q」を結論として導く．

したがって，$P \vee Q$ が成立する．

テンプレート：使える性質に → があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$P \rightarrow Q$	◯◯◯
P	

変更後

使える性質	導く性質
$P \rightarrow Q$	◯◯◯
P	
Q	

次の恒真式に基づく (モードゥス・ポネンス)

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$$

テンプレート：使える性質に → があるとき (証明の雛形)

$P \rightarrow Q$ と P から，Q となる．
ここで「◯◯◯」を結論として導く．

テンプレート：導く性質に $\rightarrow$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P \rightarrow Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	~~$P \rightarrow Q$~~
P	Q

これは

$$(\bigcirc\bigcirc\bigcirc \rightarrow (P \rightarrow Q)) \Leftrightarrow ((\bigcirc\bigcirc\bigcirc \wedge P) \rightarrow Q)$$

に基づく変更 (**参照：第** 1 **回 追加問題** 1.5.2)

テンプレート：導く性質に $\rightarrow$ があるとき (証明の雛形)

P **とする．**

ここで「Q」を結論として導く．

テンプレート：導く性質に $\rightarrow$ があるとき Part II (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$P \rightarrow Q$

変更後

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{P \rightarrow Q}$
$\neg Q$	$\neg P$

これは対偶による証明とも呼ばれる証明手法

対偶法則 (第 1 回の「重要な恒真命題」)

$$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

テンプレート：導く性質に $\rightarrow$ があるとき Part II (証明の雛形)

対偶による証明を行うために，$\neg Q$ を仮定する．

ここで $\neg P$ を結論として導く．

したがって，$P \rightarrow Q$ が成立する．

テンプレート：使える性質に ¬ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\neg P$	◯◯◯
P	

変更後

使える性質	導く性質
$\neg P$	◯◯◯
P	
矛盾 (F)	

テンプレート：使える性質に ¬ があるとき (証明の雛形)

$\neg P$ は P に矛盾する．

テンプレート：導く性質に ¬ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
◯◯◯	$\neg P$

変更後

使える性質	導く性質
◯◯◯	$\cancel{\neg P}$
P	**矛盾** (F)

これは背理法と呼ばれる証明手法

テンプレート：導く性質に ¬ があるとき (証明の雛形)

背理法による証明を行うために，P であると仮定する．

ここで矛盾を結論として導く．

したがって，$\neg P$ が成立する．

テンプレート：使える性質に ∀ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\forall\, x \in D\ (P(x))$	○○○

変更後

自分で作った $x_0 \in D$ に対して (x_0 は D の要素である限り何でもよい)

使える性質	導く性質
$\forall\, x \in D\ (P(x))$	○○○
$P(x_0)$	

この変更を**全称例化**と呼ぶこともある

テンプレート：使える性質に ∀ があるとき (証明の雛形)

$x_0 \in D$ なので $P(x_0)$ が成り立つ．
ここで「○○○」を結論として導く．

テンプレート：導く性質に $\forall$ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$\forall\ x \in D\ (P(x))$

変更後

任意の $x \in D$ に対して

使える性質	導く性質
○○○	$\cancel{\forall\ x \in D\ (P(x))}$
$x \in D$	$P(x)$

テンプレート：導く性質に $\forall$ があるとき (証明の雛形)

任意の要素 $x \in D$ を選ぶ．

ここで「$P(x)$」を結論として導く．

したがって，$\forall\ x \in D\ (P(x))$ が成立する．

テンプレート：使える性質に ∃ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
$\exists\, x \in D\ (P(x))$	○○○

変更後

$P(x_0)$ が真となるような $x_0 \in D$ に対して

使える性質	導く性質
$\exists\, x \in D\ (P(x))$ $P(x_0)$ $x_0 \in D$	○○○

ただし，x_0 は証明の中で既に登場した変数であってはいけない

この変更を**存在例化**と呼ぶこともある

テンプレート：使える性質に ∃ があるとき (証明の雛形)

$P(x_0)$ となる $x_0 \in D$ を考える．
ここで「○○○」を結論として導く．

テンプレート：導く性質に ∃ があるとき (表)

変更前

使える性質	導く性質
○○○	$\exists\, x \in D\ (P(x))$
$x_0 \in D$	

変更後

構成した $x_0 \in D$ を考えると

使える性質	導く性質
○○○	~~$\exists\, x \in D\ (P(x))$~~
$x_0 \in D$	$P(x_0)$

- これは**構成による証明**と呼ばれることもある
- 典型的には，$P(x_0)$ となる $x_0 \in D$ を自分で構成しないといけない

テンプレート：導く性質に ∃ があるとき (証明の雛形)

ここに自分で構成した $x_0 \in D$ の定義を書く．

ここで「$P(x_0)$」を結論として導く．

したがって，$\exists\, x \in D\ (P(x_0))$ が成立する．

テンプレート：数学的帰納法 (表)

基底段階

使える性質	導く性質
	$P(1)$

帰納段階

任意の正の整数 k に対して

使える性質	導く性質
$P(k)$	$P(k+1)$

この「$P(k)$」を**帰納法の仮定**と呼ぶ

テンプレート：数学的帰納法 (証明の雛形)

[基底段階] まず，$P(1)$ を証明する．

ここで $P(1)$ を結論として導く．

したがって，$P(1)$ が成立する．

[帰納段階] 次に，k を任意の正の整数とする．

$P(k)$ が成立すると仮定する．

ここで $P(k+1)$ を結論として導く．

したがって，$P(k)$ ならば $P(k+1)$ が成立する．

したがって，任意の正の整数 n に対して $P(n)$ が成立する． □